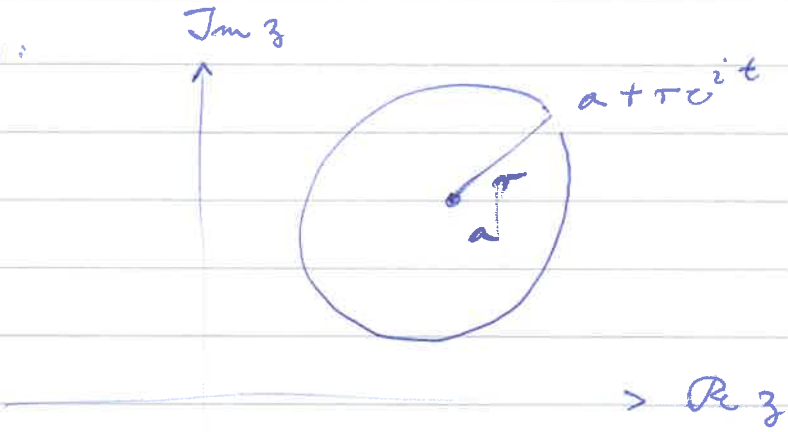
Exempel: Beräkna

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{z-a}\, dz$$

där $a \in \mathbb{C}$ och, för $r > 0$,

$$\gamma_r = \{ z(t) = a + re^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi \}.$$

Skiss:



Vi har $z'(t) = ire^{it}$

och $f(z(t)) = a + re^{it} - a$

$$= re^{it}.$$

Nu fås

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{z-a}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} \cdot ire^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} dt$$

$$= \underline{\underline{2\pi i}}.$$

Obs: oberoende av $r > 0$.

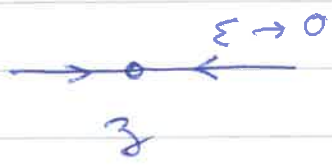
Exempel: Undersök

$$\lim_{\mathbb{C}\ni h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

för $f(z) = \bar{z} = x - iy$.

Vi undersöker, för fixt z, gränsvärdet på två olika sätt.

1) Tag $h = \varepsilon \in \mathbb{R}$, låt $\varepsilon \to 0$.



Vi har $f(z+h) - f(z)$

$$= x + \varepsilon - iy - (x - iy) = \varepsilon$$

så $$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = \underline{\underline{1}}$$

2) $h = i\varepsilon$; låt $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon \in \mathbb{R})$.

Vi har $f(z+h) - f(z)$

$$= x - i(y+\varepsilon) - (x - iy) = -i\varepsilon$$

så $$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{-i\varepsilon}{i\varepsilon} = \underline{\underline{-1}}$$

Gränsvärdet existerar $\underline{\underline{\text{ej}}}$.