Matematik II Analys del B, Sjätte mötet vårterminen 2023

Alan Sola

Denna vecka:

- Avslutning vektoranalys
- Analytiska funktioner, introduktion

Förra gången: Gauss sats

Förra gången: Gauss sats

Theorem

Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *vara ett vektorfält av klass* C^1 *i en öppen mängd* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Förra gången: Gauss sats

Theorem

Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *vara ett vektorfält av klass* C^1 *i en öppen mängd* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.
Antag $K \subset \Omega$ *kompakt område med rand* ∂K *bestående av en eller flera* C^1*-ytor, orienterad med utåtriktad normal.*

Förra gången: Gauss sats

Theorem

Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *vara ett vektorfält av klass* C^1 *i en öppen mängd* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$*.*
Antag $K \subset \Omega$ *kompakt område med rand* ∂K *bestående av en eller flera* C^1*-ytor, orienterad med utåtriktad normal.*
Då gäller

$$\iint_{\partial K} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{u} dx dy dz.$$

Stokes sats

Stokes sats

Theorem

Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *vara ett vektorfält av klass* C^1 *i en öppen mängd* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Stokes sats

Theorem

Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *vara ett vektorfält av klass* C^1 *i en öppen mängd* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Antag $\mathcal{S} \subset \Omega$ *orienterat ytstycke med orienterad rand* $\partial\mathcal{S}$.

Stokes sats

Theorem

Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *vara ett vektorfält av klass* C^1 *i en öppen mängd* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.
Antag $\mathcal{S} \subset \Omega$ *orienterat ytstycke med orienterad rand* $\partial\mathcal{S}$.
Då gäller

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{rot}\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS.$$

Formell nablaräkning:

Formell nablaräkning:

Vi definierade först

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right).$$

Formell nablaräkning:
Vi definierade först

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right).$$

Minnesregel:

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u},$$

där

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Formell nablaräkning, vidare exempel.

Formell nablaräkning, vidare exempel.
1) Vi har

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, U$$

Formell nablaräkning, vidare exempel.
1) Vi har

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,U = \nabla \cdot (\nabla U)$$

Formell nablaräkning, vidare exempel.
1) Vi har
$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, U = \nabla \cdot (\nabla U)$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Formell nablaräkning, vidare exempel.

1) Vi har

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U = \nabla \cdot (\nabla U)$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$= \Delta U$$

- Operatorn Δ som verkar på $U \in C^2(\Omega)$ kallas *Laplaceoperatorn*.

Formell nablaräkning, vidare exempel.

1) Vi har

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U = \nabla \cdot (\nabla U)$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$= \Delta U$$

- Operatorn Δ som verkar på $U \in C^2(\Omega)$ kallas *Laplaceoperatorn*. Viktig i studiet av partiella differentialekvationer.

Formell nablaräkning, vidare exempel.

1) Vi har

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U = \nabla \cdot (\nabla U)$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$= \Delta U$$

- Operatorn Δ som verkar på $U \in C^2(\Omega)$ kallas *Laplaceoperatorn*. Viktig i studiet av partiella differentialekvationer.
- Funktioner $U \in C^2(\Omega)$ som uppfyller $\Delta U = 0$ kallas *harmoniska* i Ω.

2) För en vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ gäller att $\mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{a}) = \mathbf{0}$ för skalärer $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) För en vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ gäller att $\mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{a}) = \mathbf{0}$ för skalärer $\alpha \in \mathbb{R}$.
Formell slutsats:

$$\nabla \times \nabla U = \mathbf{0}$$

för funktioner $U \in C^2(\Omega)$

2) För en vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ gäller att $\mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{a}) = \mathbf{0}$ för skalärer $\alpha \in \mathbb{R}$. Formell slutsats:

$$\nabla \times \nabla U = \mathbf{0}$$

för funktioner $U \in C^2(\Omega)$ och detta kan också visas rigoröst.

- Konsekvens: om $\mathbf{u} = \nabla U$ för någon funktion $U \in C^2$, så gäller $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

2) För en vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ gäller att $\mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{a}) = \mathbf{0}$ för skalärer $\alpha \in \mathbb{R}$.
Formell slutsats:

$$\nabla \times \nabla U = \mathbf{0}$$

för funktioner $U \in C^2(\Omega)$ och detta kan också visas rigoröst.

- Konsekvens: om $\mathbf{u} = \nabla U$ för någon funktion $U \in C^2$, så gäller $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
  Potentialfält är virvelfria.

Varning: ∇ verkar genom derivering, så Leibnitz regel måste tillämpas.

Varning: ∇ verkar genom derivering, så Leibnitz regel måste tillämpas.
Exempelvis:

Varning: ∇ verkar genom derivering, så Leibnitz regel måste tillämpas.
Exempelvis:

$$\mathrm{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{u} - \mathbf{u} \times \mathrm{rot}\mathbf{v}.$$

Varning: ∇ verkar genom derivering, så Leibnitz regel måste tillämpas.
Exempelvis:

$$\mathrm{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{u} - \mathbf{u} \times \mathrm{rot}\mathbf{v}.$$

INTE SANT ATT

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

är lika med

$$\mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}).$$

En introduktion till komplex analys

En introduktion till komplex analys

Vi kan identifiera $\mathbb{R}^2$ med $\mathbb{C}$, de komplexa talen, genom

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

En introduktion till komplex analys

Vi kan identifiera $\mathbb{R}^2$ med $\mathbb{C}$, de komplexa talen, genom

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

där $i^2 = -1$.

En introduktion till komplex analys

Vi kan identifiera $\mathbb{R}^2$ med $\mathbb{C}$, de komplexa talen, genom

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

där $i^2 = -1$.

Rigoröst görs detta genom att betrakta par av reella tal (x, y) och införa vanlig vektoraddition

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

En introduktion till komplex analys

Vi kan identifiera $\mathbb{R}^2$ med $\mathbb{C}$, de komplexa talen, genom

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

där $i^2 = -1$.

Rigoröst görs detta genom att betrakta par av reella tal (x, y) och införa vanlig vektoraddition

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

och en multiplikation genom

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

En introduktion till komplex analys

Vi kan identifiera $\mathbb{R}^2$ med $\mathbb{C}$, de komplexa talen, genom

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

där $i^2 = -1$.

Rigoröst görs detta genom att betrakta par av reella tal (x, y) och införa vanlig vektoraddition

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

och en multiplikation genom

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

- Speciellt gäller $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$

En introduktion till komplex analys

Vi kan identifiera $\mathbb{R}^2$ med $\mathbb{C}$, de komplexa talen, genom

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

där $i^2 = -1$.

Rigoröst görs detta genom att betrakta par av reella tal (x, y) och införa vanlig vektoraddition

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

och en multiplikation genom

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

- Speciellt gäller $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$ vilket tolkas som $i^2 = -1$.

En funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kan skrivas som

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

En funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kan skrivas som

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

där $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ och $v\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ kallas *real*-och *imaginärdelar* till f.

Definition

För en orienterad deriverbar kurva

$$\gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t)\colon \alpha \le t \le \beta\}$$

sätter vi

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\, z'(t)dt.$$

En funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kan skrivas som

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

där $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ och $v\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ kallas *real*-och *imaginärdelar* till f.

Definition

För en orienterad deriverbar kurva

$$\gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t)\colon \alpha \le t \le \beta\}$$

sätter vi

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\, z'(t)dt.$$

- Utskrivet för real-och imaginärdelar betyder detta

$$\int_\alpha^\beta (udx - vdy) + i \int_\alpha^\beta (vdx + udy).$$

Exempel:
Beräkna
$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$
där $a \in \mathbb{C}$ och
$$\gamma = \{a + re^{it} \colon t \in [0, 2\pi]\}.$$

Definition
Vi säger at $f = u + iv$ är analytisk i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbb{C}$ om $u(x, y), v(x, y) \in C^1(\Omega)$ och uppfyller

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

och

$$(ii) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Definition

Vi säger at $f = u + iv$ är analytisk i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbb{C}$ om $u(x, y), v(x, y) \in C^1(\Omega)$ och uppfyller

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

och

$$(ii) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- Detta system av PDE kallas *Cauchy-Riemanns ekvationer*.

Definition

Vi säger at $f = u + iv$ är analytisk i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbb{C}$ om $u(x, y), v(x, y) \in C^1(\Omega)$ och uppfyller

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

och

$$(ii) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- Detta system av PDE kallas *Cauchy-Riemanns ekvationer*.
- Om Cauchy-Riemanns ekvationer är uppfyllda fås vägoberoende.

Exempel: Funktionen $f(z) = z^2$ har

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{och} \quad v(x, y) = 2xy$$

Exempel: Funktionen $f(z) = z^2$ har

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{och} \quad v(x, y) = 2xy$$

och

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

samt

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x.$$

Theorem

Låt $f = u + iv$ *ha* $u, v \in C^1(\Omega)$.

Theorem

Låt $f = u + iv$ *ha* $u, v \in C^1(\Omega)$. *Då är* f *analytisk om och endast om*

$$f'(z) = \lim_{\mathbb{C} \ni h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existerar i varje punkt i Ω.

Theorem

Låt $f = u + iv$ ha $u, v \in C^1(\Omega)$. Då är f analytisk om och endast om

$$f'(z) = \lim_{\mathbb{C} \ni h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existerar i varje punkt i Ω.

- OBS: $f(z) = \bar{z} = x - iy$ EJ analytisk funktion.