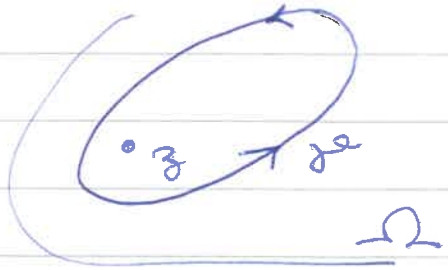
Sats (Cauchys integralformel)

Antag Ω enkelt sammanhängande öppen mängd i $\mathbb{C}$.
Antag γ enkel sluten kurva i Ω.

Då gäller

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

för varje z innanför γ.

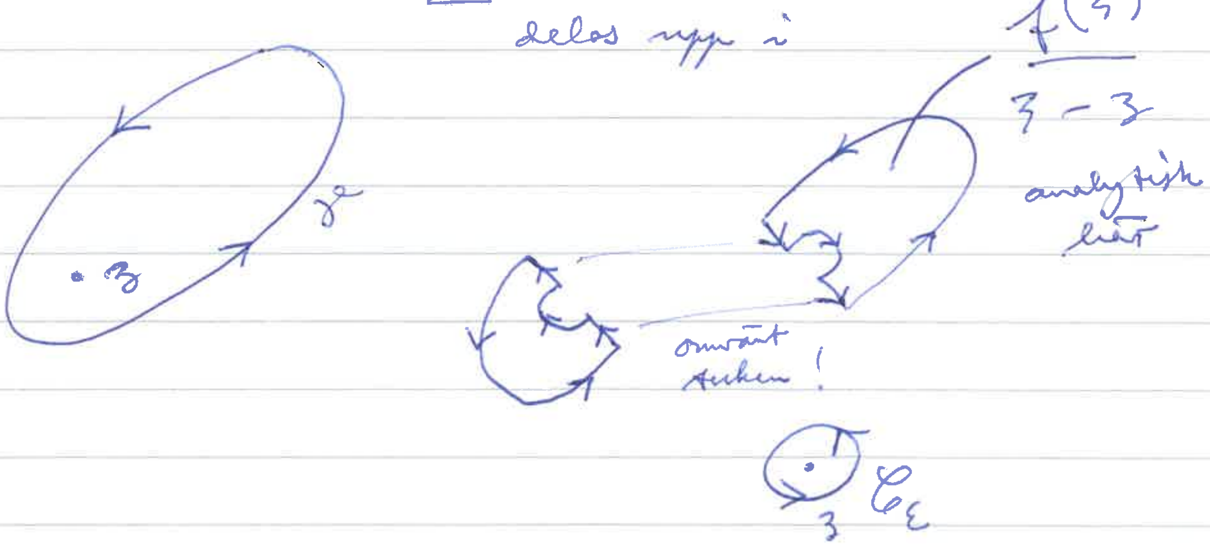


Bevisskiss

1) Notera att

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

där C_ε cirkel med radie $\varepsilon > 0$ och mittpunkt z.



2) Obs att

$$f(z) = 2\pi i\, f(z) \cdot \frac{1}{2\pi i}$$

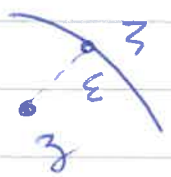
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

från vår tidigare räkning.

3) Bilda differensen:

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$



När $\varepsilon \to 0$ fås $\zeta \to z$.
Men f antogs analytisk, så differenskvoten är begränsad när $\zeta - z \to 0$.

Slutligen: $\int_{\mathcal{C}_\varepsilon} d\zeta = 2\pi\varepsilon \to 0$.