Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Analys, Matematik I, den 17 maj 2023

1. (a) Förlänger vi med täjarens och nämnarens konjugat får vi

$$\frac{\sqrt{n^2+a}-n}{\sqrt{n^2-3}-n} = \frac{a}{-3}\cdot\frac{\sqrt{n^2-3}+n}{\sqrt{n^2+a}+n} = -\frac{a}{3}\cdot\frac{\sqrt{1-3/n^2}+1}{\sqrt{1+a/n^2}+1} \to -\frac{a}{3}\cdot\frac{2}{2} = -\frac{a}{3}$$

då $n \to \infty$.

(b) Med standardutvecklingarna $\sin(t) = t - t^3/3! + O(t^5)$, $\cos(t) = 1 - t^2/2! + t^4/4! + O(t^6)$ och $e^t = 1 + t + t^2/2! + O(t^3)$ då $t \to 0$ får vi

$$\frac{\sin^2(x) - x^2}{2\cos(x) - e^{-x^2} - 1} = \frac{\left(x - x^3/6 + O(x^5)\right)^2 - x^2}{2\left(1 - x^2/2 + x^4/24 + O(x^6)\right) - \left(1 - x^2 + x^4/2 + O(x^6)\right) - 1}$$

$$= \frac{-2x^4/6 + O(x^5)}{(1/12 - 1/2)x^4 + O(x^6)} = \frac{-1/3 + O(x)}{-5/12 + O(x^2)} \to \frac{-1/3}{-5/12} = \frac{4}{5} \quad \text{då } x \to 0.$$

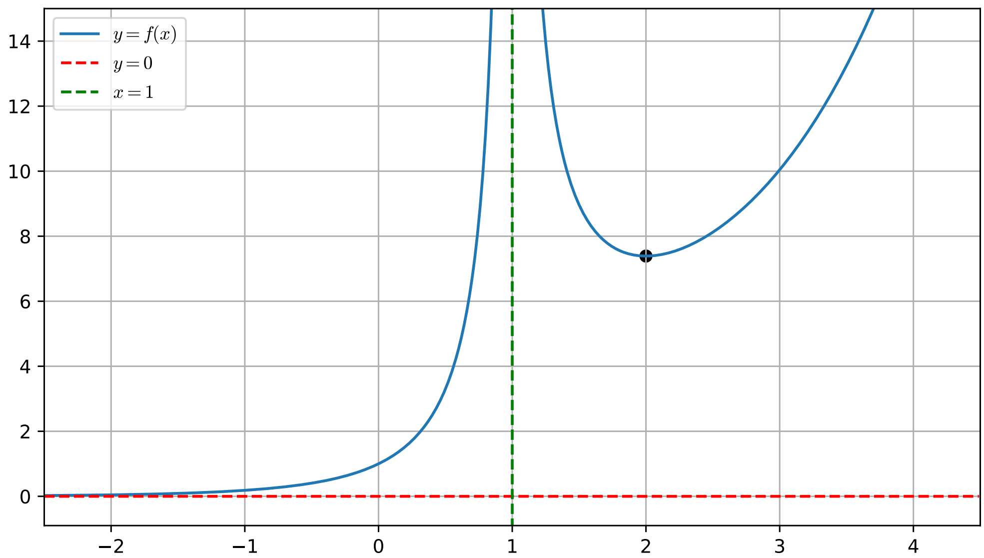
2. Funktionen $f(x) = \frac{e^x}{|x-1|}$ är definierad då $x \neq 1$, så $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Enda möjliga vertikala asymptoten är därmed $x = 1$, och vi får $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$ så $x = 1$ är en asymptot. Vidare har vi $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ så $y = 0$ är en asymptot då $x \to -\infty$, men $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ så asymptot saknas då $x \to \infty$.

Vi får, efter förenkling, att $f'(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2} & ; x > 1 \\ -\frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2} & ; x < 1 \end{cases}$ vilket ger att $f'(x) = 0$ endast för $x = 2$. Vi gör en teckentabell

x		1		2	
$f'(x)$	+	≀	-	0	+
$f(x)$	↗	≀	↘	e^2	↗

Från teckentabellen ser vi att funktionen har en lokal extrempunkt, ett lokalt minimum för $x = 2$.

Vi får att $f''(x) = \begin{cases} e^x \frac{(x-2)^2+1}{(x-1)^3} & ; x > 1 \\ -e^x \frac{(x-2)^2+1}{(x-1)^3} & ; x < 1 \end{cases} = e^x \frac{(x-2)^2+1}{|x-1|^3}$ så $f''(x) > 0$ för alla $x \in D_f$. Grafen är dämed konvex på vardera av de två intervallen $]-\infty, 1[$ och $]1, \infty[$. Vi skissar grafen:

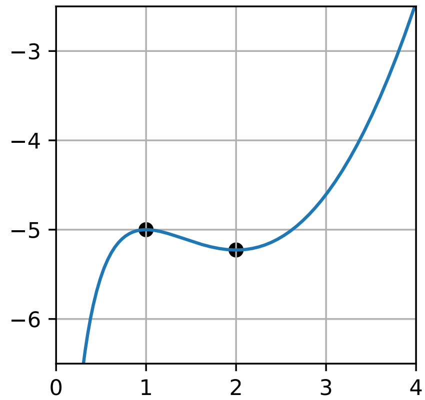


3. Låt $f(x) = 4\ln(x) - 6x + x^2$. Vi har $D_f =]0, \infty[$, och vidare är $\lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ så $V_f = \mathbb{R}$.

   Vi får att $f'(x) = \frac{4}{x} - 6 + 2x = \frac{2(x-1)(x-2)}{x}$, så derivatans nollställen är $x = 1$ och $x = 2$. Derivatans teckentabell blir

x	(0)		1		2		(∞)
$f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$4\ln(2) - 8$	$\nearrow$	(∞)

   Vi har nu tillräcklig information för att rita en skiss av grafen



   Vi får alltså tre lösningar om $4\ln(2) - 8 < a < -5$, två lösningar om $a = 4\ln(2) - 8$ eller $a = -5$, och unik lösning för alla andra a.

4. Funktionen är kontinuerlig på en kompakt mängd, samt partiellt deriverbar överallt, så enligt en känd sats finns globala maximum och minimum och dessa antas i inre stationära punkter eller på randen.

   Vi börjar med att bestämma de stationära punkterna. Vi får

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 4y \end{cases}$$

   vilket direkt ger $(x, y) = (1/2, 0)$. Denna punkt ligger inom området eftersom $x^2 + y^2 = 1/4 \leq 1$, så den är en kandidat till att vara en extrempunkt.

   Vi undersöker nu randkurvan $x^2 + y^2 =$ som är enhetscirkeln. Vi parametriserar denna genom $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ för $0 \leq t < 2\pi$. Sätter vi in detta i funktionen får vi

$$h(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2(t) + 2\sin^2(t) - \cos(t).$$

   Vi får $h'(t) = -2\cos(t)\sin(t) + 4\sin(t)\cos(t) + \sin(t) = \sin(t)(2\cos(t) + 1)$, så $h'(t) = 0$ om $\sin(t) = 0$ eller om $\cos(t) = -1/2$. I intervallet ger detta lösningarna $t = 0$, π, $2\pi/3$ och $4\pi/3$, så vi får 4 nya punkter. Vi jämför nu funktionsvärdena i de 5 funna kandidatpunkterna

(x, y)	$(1/2, 0)$	$(1, 0)$	$(-1, 0)$	$(-1/2, \pm\sqrt{3}/2)$
$f(x, y)$	$-1/4$	0	2	$9/4$

   och ser att funktionens maximum är $9/4$ i punkterna $(-1/2, \pm\sqrt{3}/2)$, och minimum är $-1/4$ i punkten $(0, 1/2)$.

5. Området är den av området mellan cirklarna med radie 1 och 2 med centrum i origo som ligger under grafen $y = |x|$, så i polära koordinater $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$ motsvaras det av området $E = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq r \leq 2,\ 3\pi/4 \leq \theta \leq 9\pi/4\}$ i $r\theta$-planet. Vi får

$$I = \iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy = \iint_E e^r r\, drd\theta = \int_{3\pi/4}^{9\pi/4} d\theta \int_1^2 re^r\, dr = \frac{3\pi}{2}\int_1^2 re^r\, dr$$

Vi beräknar den återstående integralen med partialintegrering vilket ger

$$I = \frac{3\pi}{2}\int_1^2 re^r\, dr = \frac{3\pi}{2}\left(\Big[re^r\Big]_1^2 - \int_1^2 e^r\, dr\right) = \frac{3\pi}{2}\left(\Big[re^r\Big]_1^2 - \Big[e^r\Big]_1^2\right) = \frac{3\pi e^2}{2}.$$

6. (a) Differentialekvationen är separabel. Vi skriver om den som $\frac{\ln(y)}{y}y' = x$ och integrerar båda sidor vilket ger $\int \frac{\ln(y)}{y}\, dy = \int x\, dx$. Substitutionen $u = \ln(y)$ ger $du = \frac{dy}{y}$ så $\int \frac{\ln(y)}{y}\, dy = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + C_1 = \frac{\ln(y)^2}{2} + C_1$, så vi får

$$\frac{\ln(y)^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_2.$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = e$ ger $C_2 = \frac{1}{2}$, vilket ger $\ln(y)^2 = 1 + x^2$, så $\ln(y) = \pm\sqrt{1+x^2}$. Ytterligare en tillämpning av begynnelsevillkoret ger att $\ln(y) = \sqrt{1+x^2}$, så $y(x) = e^{\sqrt{1+x^2}}$.

(b) Vi multiplicerar den linjära differentialekvationen $y' + \frac{2}{x}y = x$ med den integrerande faktorn $e^{2\ln(x)} = x^2$ och får då

$$\left(x^2y\right)' = x^3.$$

Integrerar vi båda sidor får vi $x^2y = \frac{x^4}{4} + C$. Begynnelsevillkoret $y(1) = 0$ ger nu att $C = -1/4$, varmed lösningen är $y(x) = \dfrac{x^4 - 1}{4x^2}$ för $x > 0$.