MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask
Föreläsare: Per Alexandersson

Tentamensskrivning i
Algebra, Matematik I, 7.5 hp
den 12 juni 2023

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Betygsgränser:

Max	30 p	B	24 p	D	18 p
A	27 p	C	21 p	E	15 p

Koordinater förutsätts vara givna med avseende på en högerorienterad ON-bas.

1. (a) Beräkna $z^3 + z^4 + z^5 + \cdots + z^8$ för $z = 2i$. Svara på formen $a + ib$. (3p)
   (b) Bestäm resten då polynomet $x^7 + x^6 + x + 4$ delas med $x + 1$. (1p)
   (c) Visa att $(P \implies Q) \vee (Q \implies P)$ är en tautologi (dvs. alltid sann). (1p)

2. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $(z^6 - 64)(z^4 + 5z^2 + 6) = 0$, där $z \in \mathbb{C}$. Alla rötter ska anges på rektangulär form. (5p)

3. En talföljd definieras av $a_1 = 5$ och $a_n = 2a_{n-1} - 3$ för $n \geq 2$.
   (a) Beräkna a_2 och a_3. (1p)
   (b) Visa med hjälp av induktion att $a_n = 2^n + 3$ för alla $n \geq 1$. (4p)

4. För varje $a \in \mathbb{R}$, lös följande ekvationssystem: (5p)

$$\begin{cases} 2x + y + z &= 1 \\ x - 2y + 2z &= 1 \\ x + 8y - 4z &= a. \end{cases}$$

5. I triangeln med hörnen A, B och C sätts P på mittpunkten för sidan BC och Q på mittpunkten för sidan AC. Låt därefter M beteckna mittpunken på PQ. Linjerna AP och BM skär i en punkt S. Vektorerna $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$ utgör en bas för planet.
   (a) Utryck vektorn $\overrightarrow{BM}$ som en linjärkombination av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. (2p)
   (b) Utryck vektorn $\overrightarrow{AS}$ som en linjärkombination av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. (3p)

6. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som projicerar en vektor i $\mathbb{R}^3$ vinkelrätt på vektorn $(2, 2, 1)$.
   (a) Bestäm avbildningsmatrisen för T i standardbasen. (2p)
   (b) Vektorerna $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$, $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{3}(2, -1, -2)$, $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{3}(-1, 2, -2)$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$. Bestäm avbildningsmatrisen A för T i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$. (1p)
   (c) Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^2$. Om $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är en linjär avbildning som uppfyller att $L(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ och $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, måste L vara en vinkelrät projektion på $\mathbf{u}$? Motivera ditt svar! (2p)