Lösningsskisser till tentamen i Analys, Matematik I, den 14 juni 2023

1. (a) Med standardutvecklingarna $\ln(1+t) = t - t^2/2 + O(t^3)$, och $\arctan(t) = t - t^3/3 + O(t^4)$ då $t \to 0$ får vi

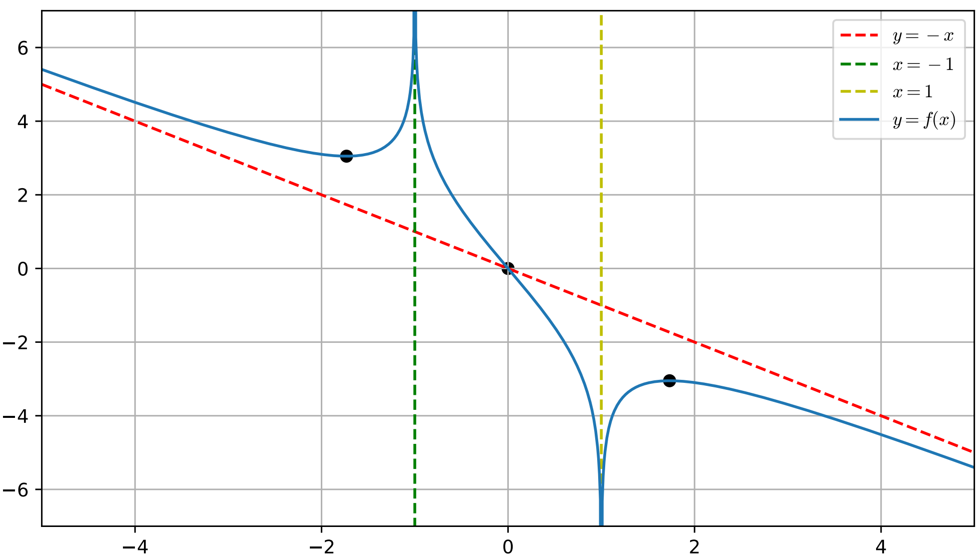
$$\frac{(\ln(1+x))^2 - \ln(1+x^2)}{2x - \arctan(2x)} = \frac{\left(x - x^2/2 + O(x^3)\right)^2 - (x^2 - x^4/2 + O(x^6))}{2x - (2x - (2x)^3/3 + O(x^4))}$$
$$= \frac{x^2 - x^3 + O(x^4) - x^2 + O(x^4)}{8x^3/3 + O(x^4)} = \frac{-1 + O(x)}{8/3 + O(x)} \to \frac{-1}{8/3} = -\frac{3}{8} \quad \text{då } x \to 0.$$

   (b) $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{-1/h^2}}{h} = \left[\begin{smallmatrix} h = 1/t \\ t \to \pm\infty \end{smallmatrix}\right] = \lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{t}{e^{t^2}} = 0$, där sista gränsvärdet är 0 eftersom exponentialfunktionen växer mycket fortare än polynom.

2. Funktionen $f(x) = \ln|x-1| - \ln|x+1| - x$ är definierad då $x \neq \pm 1$. De möjliga vertikala asymptoterna är därmed $x = \pm 1$, och eftersom vi får $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty$ och $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$ är båda asymptoter. Vidare får vi $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$ och $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \ln\left|\dfrac{1 - 1/x}{1 + 1/x}\right| = 0$ så $y = kx + m = -x$ är en sned asymptot då $x \to \pm\infty$.
   Vi får att $f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{3-x^2}{(x-1)(x+1)}$ vilket ger att $f'(x) = 0$ för $x = \pm\sqrt{3}$. Vidare blir $f''(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$ vilket ger att $f''(x) = 0$ bara för $x = 0$. Vi gör en teckentabell

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	-	0	+	$\wr$	-	-	-	$\wr$	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	lok.min	$\nearrow$	$\wr$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\wr$	$\nearrow$	lok.max	$\searrow$
$f''(x)$	+	+	+	$\wr$	+	0	-	$\wr$	-	-	-
$f(x)$	$\smile$	$\smile$	$\smile$	$\wr$	$\smile$	infl.	$\frown$	$\wr$	$\frown$	$\frown$	$\frown$

   Från denna ser vi att funktionen har lokala extrempunkter i $x = \pm\sqrt{3}$, och en inflektionspunkt i $x = 0$. Grafen är konvex på vardera av de två intervallen $]-\infty, -1[$ och $]-1, 0]$, och konkav på $[0, 1[$ och på $]1, \infty[$. Vi skissar grafen:



3. I polära koordinater $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$ motsvaras området D av området $E = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le r \le 2,\ -\pi/2 \le \theta \le \pi/4\}$ i $r\theta$-planet. Vi får

$$\iint_D \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,dxdy = \iint_E \frac{r^2\cos^2(\theta) - r^2\sin^2(\theta)}{r^2} r\,drd\theta = \iint_E r(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))\,drd\theta$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \cos(2\theta)\,d\theta \int_1^2 r\,dr = \left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/4} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=1}^{r=2} = \frac{1-0}{2}\cdot\frac{4-1}{2} = \frac{3}{4}.$$

4. Funktionen är kontinuerlig på en kompakt mängd, samt partiellt deriverbar överallt, så enligt en känd sats finns globala maximum och minimum och dessa antas i inre stationära punkter eller på randen.

   Vi börjar med att bestämma de stationära punkterna. Vi får $\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 4y - 2 \end{cases}$ vilket ger punkten $(x,y) = (1,1)$ som ligger i området och därmed är en kandidatpunkt.

   Vi undersöker nu kanten $y = 0$ för $0 < x < 2$. Vi får $h_1(x) = f(x,0) = x^2$ så $h_1'(x) = x$ så $h'(x) \neq 0$ i intervallet.

   Kanten $x = 2$, $0 < y < 4$ ger $h_2(y) = f(2,y) = 2y^2 - 6y + 4$. Vi får $h_2'(y) = 4y - 6$ så $h_2'(y) = 0$ för $y = 3/2$ som ligger i intervallet, och ger punkten $(2, 3/2)$.

   Kanten $y = 2x$ för $0 < x < 2$ parametriseras genom $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$ för $0 < t < 2$, så $h_3(t) = f(t,2t) = 5t^2 - 4t$. Vi får $h_3'(t) = 10t - 4$ så $h'(t) = 0$ ger randpunkten $(2/5, 4/5)$.

   Vi jämför funktionsvärdena i våra 3 funna punkter samt hörnpunkterna som också är kandidater:

(x,y)	$(1,1)$	$(2,3/2)$	$(2/5,4/5)$	$(0,0)$	$(2,0)$	$(2,4)$
$f(x,y)$	-1	$-1/2$	$-4/5$	0	4	12

   så minsta värdet är $f(1,1) = -1$ och det största $f(2,4) = 12$.

5. (a) Begränsningskurvorna $y = x$ och $y = 2\sqrt{x}$ skär varandra då $x = 0$ och då $x = 4$, så området ges av

$$x \le y \le 2\sqrt{x}, \qquad 0 \le x \le 4.$$

   Om vi beräknar volymen som fås då den övre kurvan roterar kring x-axeln med skivformeln för rotationsvolym, och subtraherar volymen som genereras av den undre kurvan, får vi att volymen V_1 ges av

$$V_1 = \pi\int_0^4 \left(2\sqrt{x}\right)^2 dx - \pi\int_0^4 (x)^2\,dx = \pi\int_0^4 (4x - x^2)\,dx = \pi\left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{32\pi}{3}$$

   (b) Med formeln för cylindriska skal (rörformiga element) får vi

$$V_2 = 2\pi\int_0^4 x(2\sqrt{x} - x)\,dx = 2\pi\int_0^4 (2x^{3/2} - x^2)\,dx = 2\pi\left[\frac{2x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{128\pi}{15}.$$

6. (a) Vi multiplicerar den linjära differentialekvationen $y' + 2xy = x$ med den integrerande faktorn e^{x^2} och får då

$$\left(e^{x^2} y\right)' = xe^{x^2}.$$

Integrerar vi båda sidor får vi $e^{x^2} y = \frac{e^{x^2}}{2} + C$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger nu att $C = 1/2$, varmed lösningen är $y(x) = \dfrac{1 + e^{-x^2}}{2}$.

(b) Vi börjar med att lösa den homogena ekvationen $y_h'' + y_h' - 2y_h = 0$. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + r - 2 = 0$, med lösningar $r = 1$ och -2, så $y_h = Ae^x + Be^{-2x}$, för $A, B \in \mathbb{R}$.

Om vi ansätter en partikulärlösning på formen $y_p = ze^x$ så blir $y_p' = (z' + z)e^x$ och $y_p'' = (z'' + 2z' + z)e^x$ så vi får $y_p'' + y_p' - 2y_p = (z'' + 3z')e^x$ vilket skall vara lika med e^x, vilket betyder att $z'' + 3z' = 1$. Ansätter vi $z' = a$ får vi att $a = 1/3$, så vi kan ta $z = x/3$, så $y_p = xe^x/3$

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är därmed

$$y = y_p + y_h = (x/3 + A)e^x + Be^{-2x}.$$