


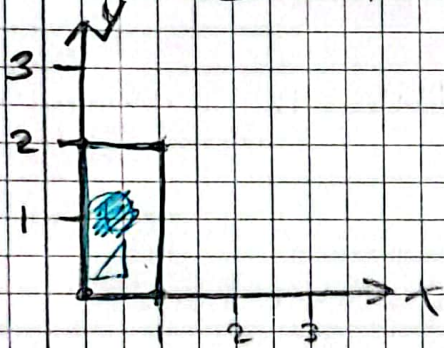
Övningar kap 6:

6.2 Beräkna följande dubbelintegraler över angivna områden Δ :

$$\iint_{\Delta} \frac{dx dy}{(1+x+y)^2}$$

Δ är rektangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$ och $(0,2)$.

Rita först upp integrationsområdet 



Δ är området mellan kurvorna $y=0$ och $y=2$ och $x=0$ och $x=1$

Integralen blir då:

$$\int_0^2 \left(\int_0^1 \frac{dx}{(1+x+y)^2} \right) dy$$

Integrera först med x

$$\int_0^2 \left(\int_0^1 \frac{1}{(1+x+y)^2} dx \right) dy = \int_0^2 \left(\int_0^1 \frac{1}{(1+x+y)(1+x+y)} dx \right) dy = \int_0^2 \left(\int_0^1 \frac{1}{1+2x+2y+2xy+x^2+y^2} dx \right) dy$$

$$= \int_0^2 \left[\ln |1+2x+2y+2xy+x^2+y^2| \right]_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^2 \left(\ln |1+2 \cdot 1+2y+2 \cdot 1 \cdot y+1^2+y^2| - \ln |1+2y+y^2| \right) dy$$

$$= \int_0^2 \left(\ln(4+4y+y^2) - \ln(1+2y+y^2) \right) dy$$

$$\int_0^2 \ln(4+4y+y^2) - \ln(1+2y+y^2) dy$$

$$\begin{aligned} 4+4y+y^2 &= (y+2)^2 \\ 1+2y+y^2 &= (y+1)^2 \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \ln(y+2)^2 - \ln(y+1)^2 dy$$

$$= 2 \int_0^2 (\ln(y+2) - \ln(y+1)) dy$$

$$= 2 \int_0^2 \ln\left(\frac{y+2}{y+1}\right) dy =$$

Partiell integration:

$$= 2 \left(y \ln\left(\frac{y+2}{y+1}\right) - \int y \cdot \frac{y+1}{y+2} dy \right)$$

$$= 2 \left(y \ln\left(\frac{y+2}{y+1}\right) - \int \frac{y^2+y}{y+2} dy \right)$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} y \\ y+2 \overline{) y^2+y} \\ \underline{-(y^2+2y)} \\ -y \end{array}$$

$$\Rightarrow 2 \left(y \ln\left(\frac{y+2}{y+1}\right) - \int y - \frac{y}{y+2} dy \right)$$

$$\begin{array}{r} y \sqrt{y+2} \\ = y+0 \end{array}$$

$$\Rightarrow 2 \left(y \ln\left(\frac{y+2}{y+1}\right) - \int y - 1 + \frac{2}{y+2} dy \right)$$

$$= 2 \left(y \ln\left(\frac{y+2}{y+1}\right) - \left(\frac{y^2}{2} - y + 2 \ln(y+2) \right) \right)$$

$$\left[2 \left(y \ln\left(\frac{y+2}{y+1}\right) - \frac{y^2}{2} + y - 2 \ln(y+2) \right) \right]_{y=0}^{y=2}$$

$$= 2 \left(2 \ln \frac{4}{3} - 2 + 2 - 2 \ln 4 \right) - 2 \left(0 \ln \frac{2}{1} - 0 - 0 - 2 \ln 2 \right)$$

$$= 4 \ln \frac{4}{3} - 4 \ln 4 + 4 \ln 2 = 4 \ln 4 - 4 \ln 3 - 4 \ln 4 + 4 \ln 2$$

$$= -4 \ln 3 + 4 \ln 2 = \ln \frac{2^4}{3}$$