MAX- OCH MINPROBLEM I TVå VARIABLER

1.

Bestäm största och minsta värde till funktionen

$$f(x, y) = \ln x + \ln y - x - y$$

i området $\{(x, y) : \frac{1}{4} \leq x \leq 2, \frac{1}{2x} \leq y \leq 2\}$.

Lösning: $f'_x = \frac{1}{x} - 1 = 0$ och $f'_y = \frac{1}{y} - 1 = 0$ ger den unika kritiska punkten $(1, 1)$. Övriga möjliga extrempunkter är "hörnen"$(\frac{1}{4}, 2), (2, \frac{1}{4})$ och $(2, 2)$, samt kritiska punkter till $h_1(t) = f(t, 2), \frac{1}{4} < t < 2, h_2(t) = f(2, t), \frac{1}{4} < t < 2$ och $h_3(t) = f(t, 1/(2t)), \frac{1}{4} < t < 2$. Vi får

$$h_1'(t) = \frac{1}{t} - 1 = 0 \qquad \Rightarrow t = 1 \text{ vilket ger } (1, 2)$$

$$h_2'(t) = \frac{1}{t} - 1 = 0 \qquad \Rightarrow t = 1 \text{ vilket ger } (2, 1)$$

$$h_3'(t) = 1 - \frac{1}{2t^2} = 0 \qquad \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ vilket ger } (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

De sju punkterna $(1, 1), (\frac{1}{4}, 2), (2, \frac{1}{4}), (2, 2),\ (1, 2),\ (2, 1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ger funktionsvärdena $-2, -\ln 2 - \frac{9}{4}, -\ln 2 - \frac{9}{4}, 2\ln 2 - 4, \ln 2 - 3, \ln 2 - 3, -\ln 2 - \sqrt{2}$, varav -2 är störst och $-\ln 2 - \frac{9}{4}$ är minst.

Svar. Funktionens minsta värde är $-\ln 2 - \frac{9}{4}$. Funktionens största värde är -2.

2.

Bestäm största och minsta värde till funktionen

$$f(x, y) = 3x - 4x^3 + 12xy$$

i det område som bestäms av olikheterna $x \geq 0, y \geq 0$ och $x + y \leq 1$.

Lösning: Eftersom $\frac{\partial f}{\partial x} = 3 - 12x^2 + 12y$ och $\frac{\partial f}{\partial y} = 12x$, så följer det att $\nabla f(x, y) = 0$ om och endast om $x = 0, y = -\frac{1}{4}$. Det finns alltså inga stationära punkter inuti området och därför måste funktionen anta sina extremvärden på randen. Randen till området består av tre segment som ligger på linjerna $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$. Låt oss behandla dessa segment separat.
Om $x = 0$ då är $f(x, y) = 0$.
Om $y = 0$ då är $f(x, y) = 3x - 4x^3 =: g(x)$, $0 \leq x \leq 1$. $g'(x) = 3 - 12x^2 = 0$ om och endast om $x = \pm\frac{1}{2}$. Av dessa nollställen till derivatan ligger bara $\frac{1}{2}$ i intervallet $[0, 1]$. Vi ser att $f(\frac{1}{2}, 0) = 1$. Vidare skall vi beräkna funktionens värden i gränspunkterna: $f(0, 0) = 0, f(1, 0) = -1$.
Om $x + y = 1$ då fås $y = 1 - x$ och $f(x, y) = f(x, 1 - x) = -4x^3 - 12x^2 + 15x =: h(x)$, $0 \leq x \leq 1$. $h'(x) = -12x^2 - 24x + 15$. Detta andragradspolynom har rötterna $\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}$. Av dem ligger bara $\frac{1}{2}$ i intervallet $[0, 1]$. Vi ser att $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 4$. Genom att jämföra de erhållna värdena får vi följande

Svar. Funktionens minsta värde är -1, Funktionens största värde är 4,.

3.

Bestäm största och minsta värde till funktionen

$$f(x,y) = xy - \ln(x^2+y^2)$$

i området $D = \{(x,y) : \frac{1}{4} \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

Lösning: $f'_x = y - \frac{2x}{x^2+y^2} = 0$ och $f'_y = x - \frac{2y}{x^2+y^2} = 0$. $yf'_x - xf'_y = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = 0$ dvs $x = \pm y$. Insättning i $f'_x = 0$ ger $x = \pm 1$ och därefter de kritiska punkterna $(1,1)$ och $(-1.-1)$ med det gemensamma funktionsvärdet $1 - \ln 2$. På den yttre randen antar f samma värden som $h_1(t) = f(2\cos t, 2\sin t) = 2\sin 2t - 2\ln 2$ som uppenbarligen varierar mellan $-2 - 2\ln 2$ och $2 - 2\ln 2$ eftersom $-1 \leq \sin 2t \leq 1$. På samma sätt antar f på den inre randen samma värden som $h_2(t) = f(\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t) = \frac{1}{8}\sin 2t + 2\ln 2$ som varierar mellan $-\frac{1}{8} + 2\ln 2$ och $\frac{1}{8} + 2\ln 2$. Jämförelse av talen $1 - \ln 2, \pm 2 - 2\ln 2$ och $\pm\frac{1}{8} + 2\ln 2$ ger Max$=\frac{1}{8} + 2\ln 2$ och Min$=-2 - 2\ln 2$.

Svar. Funktionens minsta värde är $-2 - 2\ln 2$. Funktionens största värde är $\frac{1}{8} + 2\ln 2$.

/Martin Tamm/141130/