MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del B
25 maj 2023

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 4 från teorifrågorna, krävs för godkänt.

1. Beräkna flödesintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (x^3 - \sin y, y^3 + e^z \cos(xz), z^3 + z^2 - xy)$$

ut ur enhetsklotet i $\mathbb{R}^3$.

Lösningsförslag: *Eftersom vektorfältet* $\mathbf{u}$ *är av klass* C^∞ *i* $\mathbb{R}^3$ *och enhetsklotet är en kompakt mängd med slät rand kan vi tillmpa Gauss sats, vilket ger att den sökta flödesintegralen*

$$\iint_{\{x^2+y^2+z^2=1\}} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\{x^2+y^2+z^2<1\}} \mathrm{div}\mathbf{u} dxdydz.$$

Vi beräknar

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2z = 3(x^2 + y^2 + z^2) + 2z.$$

Vi inför rymdpolära koordinater

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r \sin\theta \sin\phi, \quad z = r\cos\theta$$

och beräknar funktionaldeterminanten

$$J = r^2 \sin\theta.$$

Vi får nu

$$\iiint_B \mathrm{div}\mathbf{u} dxdydz = \int_{r=0}^1 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} (3r^2+2r\cos\theta) r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta = 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi (3r^4 \sin\theta + 2r^3 \sin\theta\cos\theta) dr d\theta.$$

Vi har

$$2\pi \int_0^1 \int_0^\pi (3r^4 \sin\theta + 2r^3 \sin\theta \cos\theta) dr d\theta = 2\pi \int_0^1 [-3\cos\theta r^4 + r^3 \sin^2\theta]_0^\pi dr = \frac{12\pi}{5}.$$

Alltså är den sökta flödesintegralens värde lika med $\frac{12}{5}\pi$.

2. (a) Undersök huruvida vektorfältet

$$\mathbf{u} = (x + y + z, y^2, 3z)$$

är konservativt. (2p)

(b) Beräkna kurvintegralen av $\mathbf{u}$ längst med den räta linjen som förbinder $(1, 1, 1)$ med $(2, 3, 2)$. (3p)

Lösningsförslag:

(a) Det givna vektorfältet är inte konservativt. Detta kan till exempel inses genom att utnyttja att en konservativt fält är rotationsfritt, medan det givna fältet har $\mathrm{rot}\mathbf{u} = (0, 1, -1)$.

(b) Vi beräknar kurvintegralen medelst parametrisering. En riktningsvektor till linjesegmentet ges av $(2, 3, 2) - (1, 1, 1) = (1, 2, 1)$ *och vi får en beskrivning av linjesegmentet på parameterform genom*

$$\mathbf{r}(t) = (1 + t, 1 + 2t, 1 + t), \quad 0 \le t \le 1.$$

Vi har vidare

$$\mathbf{r}'(t) = (1, 2, 1).$$

Insättning ger

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) = (3 + 4t, 1 + 4t + 4t^2, 3 + 3t)$$

och ur detta fås

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 8 + 15t + 8t^2.$$

Vi får alltså

$$\int_\gamma \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (8 + 15t + 8t^2)dt = [8t + \frac{15}{2}t^2 + \frac{8}{3}t^3]_0^1 = \frac{109}{6}.$$

3. (a) (**Teoriuppgift**) Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vara av klass C^2. Bevisa att $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) = \mathbf{0}$. (3p)

   (b) Beräkna kurvintegralen av $\mathbf{u} = (2xy^2, 2x^2y, z^{10})$ längs med den cirkel i planet $2021x - 2022y + 2023z = 1$ som har mittpunkt i $(0, 1, 1)$ och radie 13. (2p)

   Lösningsförslag:

   (a) Se kursboken av Persson-Böiers, Analys i flera variabler, kapitel 10.

   (b) En räkning ger vid handen att det givna vektorfältet har en potential given av

$$U(x, y, z) = x^2y^2 + \frac{1}{11}z^{11}.$$

Från (a) får vi att $\mathrm{rot}\mathbf{u} = \mathbf{0}$. *Den givna cirkeln i planet* $2021x - 2022y + 2023z = 1$ *begränsar ett slätt ytstycke i form av en cirkelskiva i rummet. Vi tillämpar Stokes sats på denna konfiguration och får att den sökta kurvintegralen*

$$\int_{\text{cirkel}} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\text{cirkelskiva}} \mathrm{rot}\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

4. (a) (**Teoriuppgift**) Är funktionen $f(z) = e^z + 3z^3 + 2z^2 + z + 1$ analytisk i mängden $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < \frac{5}{4}\}$? Är funktionen $g(z) = 1/(z^3 - z^2 - 16z + 16)$ analytisk i samma mängd? Motivera dina svar! (1p).

   (b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{e^z + 3z^3 + 2z^2 + z + 1}{z^3 - z^2 - 16z + 16} dz$$

där $\gamma = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = \frac{5}{4}\}$ är orienterad medurs. (2p)

(c) (**Teoriuppgift**) Ange samtliga satser du har använt för att lösa (b). (1p)

Lösningsförslag:

(a) Vi vet från kursen att e^z *samt varje polynom i variabeln* z *är analytiska i hela* $\mathbb{C}$. *Därmed är* f *analytisk i hela komplexa talplanet, och speciellt i cirkelskivan* $\{|z| < \frac{5}{4}\}$.

Vidare vet vi att en rationell funktion av z *är analytisk i varje öppen mängd som inte innehåller dess poler, det vill säga punkter där nämnarpolynomet är lika med* 0. *Vi har i detta fall att*

$$q(z) = z^3 - z^2 - 16z + 16$$

uppfyller $q(1) = 0$ *vilket betyder att* g *ej är analytisk i* $\{|z| < \frac{5}{4}\}$.

(b) Vi har $q(z) = (z - 1)(z + 4)(z - 4)$, *vilket ger vid handen att* $z = 1$ *är en enda polen till* q *inuti* $\{|z| < \frac{5}{4}\}$. *Vi kan således betrakta den analytiska funktionen*

$$g(z) = \frac{e^z + 3z^3 + 2z^2 + z + 1}{z^2 - 16}$$

och beräkna

$$\int_\gamma \frac{e^z + 3z^3 + 2z^2 + z + 1}{z^3 - z^2 - 16z + 16} dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{z - 1} dz = -2\pi i g(1)$$

där vi tagit hänsyn till den givna orienteringen. Slutligen fås

$$g(1) = \frac{e+3+2+1+1}{1-16} = -\frac{e+7}{15}.$$

(c) I (a) använde vi att att summan av analytiska funktioner är analytisk, samt att en kvot med analytiska funktioner är analytisk där nämnaren är skild ifrån 0.

I (b) använde vi faktorsatsen för komplexa polynom, faktumet att g är analytisk, samt Cauchys integralformel i punkten $z = 1$.

5. Låt $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara en följd av reellvärda kontinuerliga funktioner på intervallet $[0, 1]$.

   (a) (**Teoriuppgift**) Definiera vad som menas med att $\{f_k\}$ konvergerar punktvis till en funktion f. Definiera vad som menas med att $\{f_k\}$ konvergerar likformigt till en funktion f. (1p)

   (b) **Teoriuppgift**) Visa att om $\{f_k\}$ konvergerar likformigt mot f, så är f en kontinuerlig funktion på $[0, 1]$. (3p)

   (c) (**Teoriuppgift**) Konvergerar den specifika följden $f_k(x) = \frac{k^2}{1+kx}$ likformigt på $[0, 1]$? (1p)

   Lösningsförslag:

   (a) Se kompletteringskompendiet till kursen, sidan 12, för definitioner.

   (b) Se Sats 6.2 i kompletteringskompendiet för ett bevis.

   (c) Observera att $f_k(x)$ för fixt k är definierad för varje $x \in [0, 1]$. Vi har dock $\lim_k f(x) = \infty$ för varje fixt x, vilket betyder att f_k inte konvergerar punktvis till en reellvärd funktion. Därmed konvergerar inte heller följden likformigt.

6. Använd metoden med potensserier för att lösa differentialekvationen

$$(x-1)y'(x) + 2y(x) = 0, \quad y(0) = 2.$$

   Ange lösningen på sluten form, det vill säga, beräkna potensseriens summa.

   (*Obs: Du skall visa att du behärskar just denna metod: andra sätt att lösa differentialekvationen ger ej full poäng.*)

   Łösningsförslag:

   Låt oss göra en ansats $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ där denna potensserierepresentation antas konvergera i någon omgivning av origo, där vi har fått ett begynnelsevillkor givet.

   Vi får efter termvis derivering

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

   samt

$$xy'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k.$$

   Insättning i differentialekvationen ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} 2 a_k x^k = 0,$$

   eller omskrivet

$$2a_0 - a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} [(2+k)a_k - (k+1)a_{k+1}]x^k = 0.$$

   En konvergent potensserie är lika med 0 precis när dess koefficienter alla är lika med 0. Detta ger oss nu

$$a_1 = 2a_0$$

$$\vdots$$

$$a_{k+1} = \frac{2+k}{1+k} a_k$$

$$\vdots$$

Vi har givet att $a_0 = y(0) = 2$, *och vi ser genom induktion att* $a_{k+1} = a_0(k+1) = 2(k+1)$. *Vi har alltså*

$$y(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k,$$

och serien i högerledet kan, med hjälp av derivering av $1/(1-x)$ *och denna funktions Taylorutveckling, inses vara Taylorutvecklingen av* $y(x) = 2/(1-x)^2$, *vilken är konvergent för* $|x| < 1$.

Skrivningen beräknas vara rättad onsdagen 31 maj 2023. Se kurshemsidan för information om återlämning.