SAMMANFATTNING FÖRELÄSNING 2

ALAN SOLA

Denna föreläsning handlade dels om variabelsubstitution i dubbelintegraler och dels om generaliserade dubbelintegraler.

Efter att ha repeterat definitionen av dubbelintegraler med hjälp av trappfunktioner diskuterade vi *Riemannsummor*. För $\Delta = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ och f en kontinuerlig funktion på Δ är dessa summor på formen

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\mu(\Delta_k)$$

där $\{\Delta_k\}$ en en samling delrektanglar med $\cup_k \Delta_k = \Delta$ och $(\xi_k, \eta_k) \in \Delta_k$ är en godtycklig punkt. Man kan visa att vid godtycklig förfining av partitionen $\{\Delta_k\}$ (det vill säga $\max \operatorname{diam} \Delta_k \to 0$) konvergerar motsvarande Riemannsummor mot dubbelintegralen $\iint_\Delta f dxdy$. Motsvarande gäller också vid uppdelning av en mängd D vars rand är en nollmängd i mer generella delmängder med ränder som är nollmängder vars diametrar går mot noll.

Antag nu att $G = (g_1, g_2)$ är en inverterbar avbildning från $E \subset \mathbb{R}^2 \to D \subset \mathbb{R}^2$ med $g_1, g_2 \in C^1$. Då är g_j speciellt differentierbara, vilket betyder att man lokalt kan approximera avbildningen G med en linjär avbildning som kan representeras av den kvadratiska matrisen $(\frac{\partial g_i}{\partial u_j})_{i,j=1}^n$. Denna inducerar en lokal areadistortion som kan mätas med hjälp av *funktionaldeterminanten* $J(u_1, u_2) = \det[(\frac{\partial g_i}{\partial u_j})]$. Om vi antar att denna determinant är nollskild i E och går i gräns erhåller vi variabelbytesformeln

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(g_1(u_1,u_2), g_2(u_1,u_2))|J(u_1,u_2)|du_1du_2.$$

Som ett exempel betraktade vi *polära kooordinater* i planet.

Vi avslutade med att betrakta generaliserade dubbelintegraler. En integral kan vara generaliserad för att integrationsområdet är obegränsat eller för att integranden är obegränsad, eller båda. I flera variabler måste man vara försiktig när man evaluerar generaliserade dubbelintegraler med hjälp av itererade enkelintegraler: vi undersökte ett exempel där vertikal integration följd av horisontell gav ett annat resultat än horisontell integration följd av vertikal integration. Vi formaliserade därför konvergens av generaliserade dubbelintegraler för positiva integrander genom att ta supremum över integraler över godtyckliga uttömmande mängder. För integrander med tecken kräver man för konvergens att både den positiva och negativa delen av integranden har konvergent dubbelintegral.

Matematiska Institutionen, Stockholms Universitet, 106 91 Stockholm.
Email address: sola@math.su.se