

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 4 från teorifrågorna, krävs för godkänt.

Problemdel

1. Beräkna kurvintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{F} = (x, y^2 + 2, z - 10)$$

från $(0, 0, -9)$ till $(0, 0, 9)$ längst med skärningen av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ och planet $y = 0$.

2. Beräkna flödesintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (yz, xz, y^2 + x^2 + z)$$

ut ur den halva ellipsoiden

$$\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 3z^2 = 4, z > 0\}.$$

3. (a) Beräkna rotationen av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (2xy^3z^4, 3x^2y^2z^4, 4x^2y^3z^3 + \pi \sin(\pi z)) \quad (2p)$$

(b) Beräkna kurvintegralen av \mathbf{u} längst med en rät linje från $(1, 2, 2)$ till $(3, 5, -2)$. (3p)

4. (a) Funktionen $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - x$ är realdelen av en analytisk funktion $f(z)$. Vilken av följande funktioner kan ses som en imaginärdel till $f(z)$? (2p)

$$(a) v(x, y) = -y^3 + 3x^2y^2 - y \quad (b) v(x, y) = -y^3 + 3x^2y^2 + y \\ (c) v(x, y) = -y^3 + 3x^2y - y \quad (d) v(x, y) = x^{10}y^{100} - xy + \sin(x + y^9).$$

(b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^3 - z}$$

där $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{2}\}$. (3p)

Teoridel

5. (a) Formulera definitionen av ett *konservativt fält*, även kallat *potentialfält*. (1p)
(b) Formulera vad som menas med att en kurvintegral är *oberoende av vägen*. (1p)
(c) Visa att om $\vec{u} = (P, Q)$ är ett konservativt fält så är $\int_{\gamma} \vec{u} \cdot d\vec{r}$ oberoende av vägen. (3p)
6. (a) Formulera *Cauchy-Riemanns ekvationer*. (1p)
(b) Ge ett exempel på en funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ som inte uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer. (1p)
(c) Antag att $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ är en funktion för vilken

$$f'(z) = \lim_{\mathbb{C} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existerar i varje punkt $z \in \mathbb{C}$. Visa att real-och imaginärdelarna av f satisfierar Cauchy-Riemanns ekvationer. (3p)

Skrivningen beräknas vara rättad fredag 13 januari 2023. Se kurshemsidan för information om återlämning.