STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematik
Föreläsare: P. Alexandersson
Examinator: S. Lundqvist

Tentamen i
Algebra och kombinatorik
9 augusti 2023 kl $14^{00} - 19^{00}$

Enbart skrivdon tillåtna. Alla svar ska motiveras noga.

Uppgift 1. Svara på följande frågor.

(a) Bestäm ordningen för permutationen (1 5 2)(3 9)(4 6 8 7).

(b) Finn kvoten då $x^4 + 3x^3 + 2x + 4$ delas med $x^2 + 2$ som polynom i $\mathbb{Z}_5[x]$.

(c) Hur många inverterbara element finns i ringen $\mathbb{Z}_{24}$?

Uppgift 2. En linjär kod $\mathcal{C}$ bestäms av checkmatrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Hur många kodord innehåller $\mathcal{C}$?

(b) Vilka av orden `101`, `01110` och `10110` tillhör $\mathcal{C}$?

(c) Ordet `11111` har ett fel. Rätta detta.

Uppgift 3. Betrakta alla ord som kan bildas genom att kasta om de 13 bokstäverna i ordet `"kökkenmödding"`. [1]

(a) Hur många ord totalt kan bildas?

(b) Hur många av orden innehåller `mödding` som delord?

(c) Hur många av orden innehåller `kök` som delord?

Svaren får innehålla binomialtal, multinomialtal och fakulteter.

Vänligen vänd!

[1] Kökkenmödding betyder *avskrädeshög från nordens stenålder, bestående av lämningar från stenåldersfolkets måltider* — Svenska Akademiens ordbok

Uppgift 4. Låt X vara mängden som består av alla vektorer av längd 4, där talen i vektorerna kommer från mängden $\{-1, 0, 1\}$. Vi låter $\rho : X \to X$ beteckna cyklisk rotation av vektorn ett steg åt vänster, och vi låter $\epsilon : X \to X$ beteckna funktionen som skickar $\mathbf{v}$ på $-\mathbf{v}$.
Låt G vara gruppen som består av alla sammansättningar av ρ och ϵ; denna grupp G verkar på X.

(a) Skriv ned alla element i G.

(b) Finn två vektorer som finns i $\mathrm{Fix}(\epsilon\rho^2)$.

(c) Bestäm banan och stabilisatorn till vektorn $(1, -1, 1, -1) \in X$.

Uppgift 5. (a) Bestäm alla delgrupper till $(\mathbb{Z}_{16}, +)$. Motivera att du har hittat alla.

(b) En ändlig grupp G uppfyller att alla dess delgrupper $G_1, G_2, \ldots, G_k$ ligger inuti varandra. Det vill säga,
$$\{e\} = G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_k = G.$$
Visa att G är cyklisk.

Uppgift 6. Låt Γ vara grafen som definieras enligt följande. Noderna i Γ ges av alla sätt att partitionera talen $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ i exakt tre icke-tomma block. Noderna (partitionerna) u och v är grannar om u kan fås från v genom att ett element flyttas från ett block (innehållandes minst två element) i partitionen till ett annat block. Till exempel så är

$$\{\{1,3\},\{2\},\{4,5\}\} \text{ granne med både } \{\{1\},\{2,3\},\{4,5\}\} \text{ och } \{\{1\},\{2\},\{3,4,5\}\}$$

då vi flyttade elementet 3 från ett block till ett annat.

(a) Visa att varje hörn i Γ har 6 eller 8 grannar.

(b) Visa att Γ har en Eulerkrets.