Tentamen MM2002 2023-08-15

(1) (a) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{x^3}{\sqrt{x}}} = \ln\sqrt{x^{5/2}} = \ln x^{5/4}$,

$$f'(x) = \frac{1}{x^{5/4}} \cdot \frac{5}{4}x^{1/4} = \frac{5}{4}x^{-1} = \frac{5}{4x}$$

(Alternativ: $f(x) = \ln x^{5/4} = \frac{5}{4}\ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{4x}$)

(b) $$\text{Volymen} = \pi\int_2^4 g^2(x)\,dx$$

$$= \pi\int_2^4 \frac{1}{x\ln x}\,dx$$

$$= \pi\int_2^4 \frac{1/x}{\ln x}\,dx$$

$$= \pi\left[\ln(\ln x)\right]_2^4$$

$\left(\frac{d}{dx}\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}\right)$

$$= \pi\left(\ln(\ln 4) - \ln(\ln 2)\right)$$

$$= \pi\ln\frac{\ln 4}{\ln 2} = \pi\ln\frac{2\ln 2}{\ln 2}$$

$$= \underline{\underline{\pi\ln 2}}$$

(2) $\det A = -4a + a^3 = a(a^2-4)$,

dvs. $\det A \neq 0 \iff a \notin \{0,-2,2\}$.

$\Rightarrow$ För $a \notin \{0,-2,2\}$ har ekvationssystemet en entydig lösning.

<u>Fall $a=0$:</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftarrow \text{motsägelse}$$

$\Rightarrow$ ingen lösning

<u>Fall $a=\pm 2$:</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \pm 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \pm 2 & 0 & -4 & -3 \end{array}\right) (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \pm 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & -4 \end{array}\right) (4)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \pm 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

trappstegsform

3 variabler, men endast 2 pivotelement

$\Rightarrow$ ∞ många lösningar.

③ $$\sqrt{x^2+3x+1} - x \underset{x>0}{=} \frac{x^2+3x+1 - x^2}{\sqrt{x^2+3x+1}+x}$$

$$= \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3x+1}+x}$$

$$= \frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

$$\xrightarrow{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{1}+1} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

I termen $\frac{x^2+3x-4}{x^2+9x+20}$ försvinner både polynomen i täljare och nämnare vid $x=-4$. Faktorisera:

$$x^2+3x-4 = (x+4)(x-1),$$

$$x^2+9x+20 = (x+4)(x+5).$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+3x-4}{x^2+9x+20} = \frac{(x+4)(x-1)}{(x+4)(x+5)} = \frac{x-1}{x+5}$$

$$\xrightarrow{x\to-4} \frac{-5}{1} = \underline{\underline{-5}}$$

(4) (a) $f(x) = (x^2-2)e^{2x}$

$f'(x) = 2xe^{2x} + (x^2-2)2e^{2x} = 2e^{2x}(x^2+x-2)$.

Nollställen:

$f'(x)=0 \iff x^2+x-2=0$

$\iff x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$

$\iff x = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

Då f är deriverbart i varje $x \in \mathbb{R}$ är detta de enda kandidaterna för lokala extrempunkter. Vi har

$f'(x) = \underbrace{2e^{2x}}_{>0}(x+2)(x-1)$

och teckenstudium ger

x		-2		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

lok. max. i $x=-2$,

lok. min. i $x=1$

(b) $f''(x) = 4e^{2x}(x^2+x-2) + 2e^{2x}(2x+1)$

$= 2e^{2x}(2x^2+4x-3)$

Nollställen: $f''(x)=0 \iff 0 = x^2+2x-\frac{3}{2}$

$\iff x = -1 \pm \sqrt{1+\frac{3}{2}} = -1 \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$

Vi har $f''(x) = \underbrace{2 \cdot 2e^{2x}}_{>0}\left(x+1+\sqrt{5/2}\right)\left(x+1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

Teckenstudium:

x		$-1-\sqrt{\frac{5}{2}}$		$-1+\sqrt{\frac{5}{2}}$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	konvex		konkav		konvex

$\Rightarrow$ konvex på $(-\infty, -1-\sqrt{\frac{5}{2}}) \cup (-1+\sqrt{\frac{5}{2}}, +\infty)$, konkav på $(-1-\sqrt{\frac{5}{2}}, -1+\sqrt{\frac{5}{2}})$.

(c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ och $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ inget globalt maximum

5 (a) $\mathbb{B}$ består av tre vektorer i rummet, det räcker alltså att kolla om de är linjärt oberoende. Lös

$$\vec{0} = \lambda_1(e_1+e_2) + \lambda_2(-3e_2) + \lambda_3(e_1+e_3)$$
$$= (\lambda_1+\lambda_3)e_1 + (\lambda_1 - 3\lambda_2)e_2 + \lambda_3 e_3.$$

Då (e_1, e_2, e_3) är en bas, följer

$$\begin{aligned} \lambda_1+\lambda_3 &= 0 \overset{\lambda_3=0}{\Longrightarrow} \underline{\lambda_1 = 0} \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 &= 0 \overset{\lambda_1=0}{\Longrightarrow} -3\lambda_2 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_2 = 0} \\ \underline{\lambda_3} &\underline{= 0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \tilde{\mathbb{B}}$ är en bas.

(b) Nej, till ex. har den första vektorn inte längd 1, då

$$|e_1+e_2|^2 = |e_1|^2 + 2\langle e_1, e_2\rangle + |e_2|^2$$
$$= 1 + 2\cdot 0 + 1 = 2.$$

(c) $\vec{v}$ har koordinater $(0, 8, 15)$ i basen $\tilde{\mathbb{B}}$

$$\Leftrightarrow \vec{v} = 0\cdot(e_1+e_2) + 8\cdot(-3e_2) + 15\cdot(e_1+e_3)$$
$$= 15e_1 - 24e_2 + 15e_3.$$

$\Rightarrow \vec{v}$ har koordinater $(15, -24, 15)$ i basen $\mathbb{B}$.

(6) (a) $y' = 2xye^{x^2}$

$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int 2xe^{x^2}dx$

$\Leftrightarrow \ln|y| = \int e^u du = e^{x^2} + C$

Subst.
$u = x^2$
$du = 2x\,dx$

$\Leftrightarrow |y| = e^{e^{x^2}+C} \Leftrightarrow y = \pm e^{e^{x^2}+C}$
(tecken kan inte byta!)

Bestäm C:

$-4 \stackrel{!}{=} y(0) = \pm e^{e^{0^2}+C}$

$\Rightarrow$ tecken måste vara $-$ och

$4 = e^{e^{x^2}+C} \Leftrightarrow \ln 4 = e^{0^2} + C = 1 + C$

$\Leftrightarrow C = \ln 4 - 1$

Lösning: $\underline{\underline{y(x) = -e^{e^{x^2}+\ln 4 - 1}}}$

(b) Homogen DE via karakteristisk ekvation:

$0 = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 10\lambda = \lambda(\lambda^2 + 3\lambda - 10)$, löses av

$\lambda = 0$ och $\lambda = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2} = \begin{cases} -5 \\ 2 \end{cases}$

$\Rightarrow y_h(x) = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} + C_3$

Inhomogen med ansats $y_p(x) = \alpha e^x$. DE

$e^x \stackrel{!}{=} (\alpha e^x)''' + 3(\alpha e^x)'' - 10(\alpha e^x)' = -6\alpha e^x$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{6}, \quad y_p(x) = -\frac{1}{6}e^x$

Allmän lösning:

$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} + C_3 - \frac{1}{6}e^x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$