MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del A
23 augusti 2023

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng och minst 7,5 poäng på problemdelen krävs för att gå vidare till den muntliga delen.

Problemdel

1. Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier konvergerar absolut?

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \qquad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln(k))^2}{\ln(e+k^2)} \qquad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi)\sin\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Lösningsförslag:

(a) Denna serie konvergerar enligt Leibnitz kriterium. Den harmoniska serien $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ *är divergent, varför serien i (a) ej är absolutkonvergent.*

(b) Vi observerar att $\ln(e+k^2) = \ln[k^2(1+e/k)] = 2\ln k + \ln(1+e/k)$ *vilket betyder att termerna i serien i (b) inte går mot noll. Alltså är serien divergent.*

(c) Vi noterar först att $\cos(k\pi) = (-1)^k$*. Vidare ger en Taylorutveckling att* $k^2\sin(1/k^2) \to 1$ *när* $k \to \infty$*. Efter jämförelse med* $\sum_k \frac{1}{k^2}$ *drar vi slutsatsen att serien i (c) är absolutkonvergent, och därmed även konvergent.*

2. (a) Kan

$$f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+xy+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0),$$

utvidgas till en kontinuerlig funktion på hela $\mathbb{R}^2$ genom ett lämpligt val av $f(0,0)$?

(b) Existerar $\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x)$ för funktionen ovan?

Lösningsförslag:

(a) Vi inför polära koordinater $x = r\cos\theta$ *och* $y = r\sin\theta$ *och får*

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^4}{r^2\cos^2\theta + r^2\cos\theta\sin\theta + r^2\sin\theta} = \frac{r^2}{1+\sin\theta\cos\theta}.$$

Vidare har $1+\sin\theta\cos\theta = 1+\frac{1}{2}\sin(2\theta)$*, och detta uttryck antar värden i* $[1/2, 3/2]$*. Eftersom täljaren går mot* 0 *när* $r \to 0$ *får vi således* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$*. Vi kan alltså utvidga* f *till en kontinuerlig funktion genom att sätta* $f(0,0) = 0$*.*

(b) Eftersom f *i polära koordinater har formen* $\frac{r^2}{1+\cos\theta\sin\theta}$ *med begränsad nämnare fås* $\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y) = \infty$*.*

3. Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen

$$f(x,y) = 1 + e^x(x^2y - y)$$

samt avgör deras karaktär.

Lösningsförslag:

Funktionen f är godtyckligt många gånger deriverbar i hela $\mathbb{R}^2$, varför vi undersöker kritiska punkter där $\nabla f = \mathbf{0}$. Vi har de partiella derivatorna

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x y(x^2 + 2x - 1) \quad \textit{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x (x^2 - 1).$$

Eftersom exponentialfunktionen är nollskild för alla reella argument har vi $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ om och endast om $x = \pm 1$. Vi har vidare $\frac{\partial f}{\partial x}(\pm 1, y) = 0$ om och endast om $y = 0$.

Detta ger oss således de tvenne kritiska punkterna $(1, 0)$ samt $(-1, 0)$.

För att avgöra dessa kritiska punkters karaktär beräknar vi funktionen f:s andraderivator. Vi har

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x y(x^2 + 4x + 1), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^x (x^2 + 2x - 1)$$

samt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Vi ser nu genast att $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm 1, 0) = 0$, vilket betyder att båda de rena andraderivatorna är 0 i de kritiska punkterna. Därmed får den associerade kvadratiska formen till f utseendet Cxy i båda punkterna, för en nollskild konstant C, vilket betyder att dessa är sadelpunkter.

4. (a) Förklara varför funktionen $f(x, y) = 1 - 2x + y$ antar ett största och ett minsta värde under bivillkoret $x^2 + 2y^2 = x$.

   (b) Bestäm dessa värden samt ange i vilka punkter de antas.

   Lösningsförslag

   (a) Vi observerar att bivillkoret $x^2 + 2y^2 = x$ kan skrivas om som $x^2 - x + 2y^2 = 0$, vilket efter kvadratkomplettering får formen $(x - \frac{1}{2})^2 + 2y^2 = \frac{1}{4}$. Denna ekvation beskriver en ellips, som speciellt är en sluten och begränsad och därmed kompakt mängd. Då funktionen f är kontinuerlig antar f enligt satsen om extremvärden ett största och ett minsta värde.

   (b) Sätt $g(x, y) = x^2 - x + 2y^2$. Vi ställer upp det sedvandliga determinantvillkoret för f och g och erhåller

$$0 = \begin{vmatrix} 2x - 1 & 4y \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 1 + 8y.$$

   Detta ger $x = \frac{1}{2} - 4y$. Insättning i bivillkoret $g(x, y) = 0$ ger oss ekvationen

$$\left(\frac{1}{2} - 4y\right)^2 - \frac{1}{2} - 4y + 2y^2 = 0,$$

   vilken har rötter $y = \pm \frac{1}{6\sqrt{2}}$. Vi från detta punkten $p_1 = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{6\sqrt{2}})$ där f antar sitt största värde $f(p_1) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, samt punkten $p_2 = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{6\sqrt{2}})$ där f antar sitt minsta värde under bivillkoret, nämligen $f(p_2) = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

5. Betrakta funktionen

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

   på mängden $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$.

   Vad är supremum för f på D? Vad är infimum för f på D?

   Lösningsförslag:

   Först noterar vi att f endast kan anta positiva värden i området D. Att f är obegränsad och därmed har $\sup f = \infty$ kan inses genom att exempelvis betrakta $f(x, x, x) = \frac{x}{3}$ och låta $x \to \infty$. Låter vi istället $x \to 0$ fås $f(x, x, x) \to 0$, vilket visar att $\inf f = 0$.

   Teoridel

6. Formulera och bevisa Cauchys integralkriterium.
7. Formulera och bevisa kedjeregeln för sammansatta funktioner av typen $t \mapsto f(g(t), h(t))$.

Skrivningen beräknas vara rättad måndag august 28 2023. Se kurshemsidan för information om återlämning.