MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del A
24 november 2022

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng och minst 7,5 poäng på problemdelen krävs för att gå vidare till den muntliga delen.

Problemdel

1. Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier konvergerar absolut?

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^3} \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2e+k)} \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cos\left(\frac{1}{k}\right).$$

Lösningsförslag:

Serien i (a) konvergerar absolut eftersom serien $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ är en känt konvergent serie (p-serie med $p = 3$). Därmed är serien också konvergent då absolutkonvergens medför konvergens.

Observera att alla termer i serien i (b) är positiva. Därmed är konvergens i (b) liktydigt med absolutkonvergens för denna serie. Serien konvergerar dock inte, eftersom $1/\ln(2e+k) \geq 1/k$ vilket låter oss järföra med $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$, den divergenta harmoniska serien.

Serien i (c) är divergent eftersom termerna i serien inte går mot noll. Vi har nämligen $\lim_{k\to\infty}\cos(1/k) = 1$. Därmed är serien i (c) speciellt inte absolutkonvergent.

2. (a) Avgör om

$$f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x,y) \neq (0,0),$$

kan utvidgas till en kontinuerlig funktion på cirkelskivan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$.

(b) Existerar $\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y)$?

Lösningsförslag:

(a) Vi noterar först att funktionen är kontinuerlig i alla punkter i $\mathbb{R}^2$ utom möjligtvis där nämnaren är noll, vilket inträffar i origo. För att en kontinuerlig utvidgning skall vara möjlig måste gränsvärdet för f existera ändligt i origo.

För att undersöka om så är fallet inför vi polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Detta ger

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4}{(r^2)^2} = \cos^4(\theta) + \sin^4(\theta).$$

Det senare uttrycket är ej oberoende hur man nämar sig origo. Exempelvis har vi

$$f(r,r) = \frac{1}{2} \quad \text{medan} \quad f(r,0) = 1.$$

Vi drar slutsatsen att funktionen f är begränsad i punkterade planet, men saknar gränsvärde i origo. Således är en kontinuerlig utvidgning ej möjlig.

(b) Resonemanget i (a) medför att gränsvärde i oändligheten också saknas eftersom $f \lim_{r\to\infty}(r,r) = 1/2$ medan $\lim_{r\to\infty} f(r,0) = 1$.

3. Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen

$$f(x,y) = x + \ln\left(\frac{1}{2}x^2 + xy^2 - x\right)$$

samt avgör deras karaktär.

Lösningsförslag:

Vi beräknar först de partiella derivatorna till f. Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 2\frac{x + y^2 - 1}{x^2 + 2xy^2 - 2x}$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4\frac{y}{x + 2y^2 - 2}.$$

Vilkoret $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ medför att $y = 0$. Insättning av detta i $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ger att $x = \pm\sqrt{2}$, men f är inte definierad i $x = \sqrt{2}$.

Vi undersöker den återstående punktens karaktär medelst den associerade kvadratiska formen. Vi får efter partiell derivering att $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,0) = 0$, så det räcker att undersöka andraderivatorna med avseende på bara x och y. Görs detta på sedvanligt sätt fås den negativt definita kvadratiska formen $(-2+\sqrt{2})h^2 + (-4+2\sqrt{2})k^2$ och därmed att $(-\sqrt{2},0)$ är ett lokalt maximum:

4. (a) Förklara varför funktionen $f(x,y) = x - y$ antar ett största och ett minsta värde under bivillkoret $x^2 + 3y^2 = 1$.

(b) Bestäm dessa värden samt ange i vilka punkter de antas.

(c) Antas största och minsta värde om det ursprungliga bivillkoret ersätts med bivillkoret $x^2 + 3y = 1$?

Lösningsförslag:

(a) Vi noterar att bivillkoret beskriver en ellips i planet. En ellips är en kompakt mängd och då funktionen f ges av ett polynom är f speciellt kontinuerlig. Således ges existensen av ett största och ett minsta värde av den kända extremvärdessatsen för kontinuerliga funktioner.

(b) Stationära punkter till optimeringsproblemet med bivillkor kan bestämmas genom att undersöka när grad$f$ och grad$g$ är parallella. Vi erhåller villkoret

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2x & 6y \end{vmatrix} = 0$$

vilket ger att $x = -3y$. Insättning i bivillkoret ger sedan $9y^2 + 3y^2 = 1$, det vill säga $12y^2 = 1$. Alltså fås de två stationära punkterna $p_1 = (\sqrt{3}/2, -1/2\sqrt{3})$ samt $p_2 = (-\sqrt{3}/2, 1/2\sqrt{3})$. Evaluering av f i dessa punkter ger att $f(p_2) = -2/\sqrt{3}$ är minsta värde för f under bivillkoret, medan $f(p_1) = 2/\sqrt{3}$ är största värdet.

(c) Vi kan lösa ut y ur bivillkoret och få $y = \frac{1}{3}(1 - x^2)$. Sätts detta in i f fås funktionen

$$g(x) = f(x, y(x)) = x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}.$$

Denna funktion g är obegränsad på reella linjen, vilket medför att f ej antar största värde under bivillkoret. Däremot antas ett minsta värde. Vi har nämligen $g'(x) = 1 + \frac{2}{3}x$ och därmed en kritisk punkt i $x = -3/2$. Denna inses vara ett lokalt minimum med hjälp av teckentabell, och även ett globalt minumum eftersom g är avtagande för $x < -3/2$ och växande för $x > -3/2$.

5. Betrakta funktionen

$$f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$$

på mängden $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > y > 0\}$.

Vad är supremum för f på D? Vad är infimum för f på D?

Lösningsförslag:

Eftersom båda variablerna x och y är positiva i D är både täljare och nämnare i uttrycket som definierar f positiva. Således är f också positiv. Därmed gäller att $\inf_D f \geq 0$.

Vi observerar att för $0 < x < 1$ är grafen för $y = x^2$ innehållen i D. Att infimum för f i själva verket är lika med 0 kan inses genom att betrakta

$$f(x, x^2) = \frac{x^2}{1 + x}, \quad 0 < x < 1,$$

och observera att $\lim_{x \to 0} f(x, x^2) = 0$.

Funktionen f är obegränsad i D, vilket medför att $\sup_D f = \infty$. Detta kan inses genom att betrakta kurvan $y = \sqrt{x}$ vars graf ligger i D när $x \geq 1$.

$$f(x, \sqrt{x}) = \frac{x^{3/2}}{x + x^{1/2}}, \quad x > 1$$

och observera att $\lim_{x \to \infty} f(x, \sqrt{x}) = \infty$.

Teoridel

6. Definiera riktningsderivata och gradient. Formulera och bevisa sats om samband mellan riktningsderivata och gradient. Visa också att en funktion av två variabler växer snabbast i gradientens riktning.

7. Formulera och bevisa Cauchys integralkriterium.

Skrivningen beräknas vara rättad onsdag 30 november 2022. Se kurshemsidan för information om återlämning.