MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del A
13 oktober 2022

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng och minst 7,5 poäng på problemdelen krävs för att gå vidare till den muntliga delen.

Problemdel

1. Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier konvergerar absolut?

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{\ln(e+k^2)} \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\left(\frac{1}{k}\right).$$

Lösningsförslag

(a) Vi observerar att

$$\left|\frac{(-1)^k}{k^2}\right| = \frac{1}{k^2}$$

och drar oss till minnes att serien $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ är en känd konvergent serie. Således är den givna serien med tecken absolutkonvergent, och därmed även konvergent.

(b) vi kan skriva $\ln(e+k^2) = \ln(k^2(1+e/k^2)) = 2\ln k + \ln(1+e/k^2)$. Vi får då

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(k)}{\ln(e+k^2)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{2\ln k + \ln(1+\frac{e}{k^2})} = \frac{1}{2}.$$

Eftersom den givna seriens termer inte går mot noll när $k \to \infty$ följer det att serien är varken absolutkonvergent eller konvergent.

(c) Vi har $\lim_{k\to\infty} \sin(1/k) = 0$. Vidare är $\sin x$ positiv och växande på intervallet $[0,1]$ vilket betyder att $\sin(1/k)$ är positiv och avtagande på $[1,\infty)$. Därmed ger Leibnitz kriterium att serien konvergerar. Däremot konvergerar serien inte absolut. Ty $|(-1)\sin(1/k)| = \sin(1/k)$ och $k\sin(1/k) \to 1$ när $k \to \infty$, vilket betyder att $\sum_k \sin(1/k)$ kan jämföras med den divergenta harmoniska serien.

2. (a) Visa att

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 \ln(x^4+y^4), \quad (x,y) \neq (0,0),$$

kan utvidgas till en kontinuerlig funktion på hela $\mathbb{R}^2$.

(b) Får denna utvidgning kontinuerliga partiella derivator i hela $\mathbb{R}^2$?

Lösningsförslag

(a) Låt oss först visa att den givna funktionen har gränsvärde i origo. Detta görs med fördel medelst införande av poära koordinater. Sätt $x = r\cos\theta$ och $y = r\sin\theta$. Då fås

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^4 \ln[r^4(\sin^4\theta + \cos^4\theta)] = 4r^4 \ln r + r^4 \ln(\sin^4\theta + \cos^4\theta).$$

Observera vidare att $\sin^4(\theta) + \cos^4(\theta) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos\theta \geq \frac{1}{2}$. Därmed erhåller vi

$$\lim_{r\to 0} \left(4r^4 \ln r + r^2 \ln(\sin^4\theta + \cos^4\theta)\right) = \lim_{r\to 0} 4r^4 \ln r + \lim_{r\to 0} r^4 \ln(\sin^4\theta + \cos^4\theta) = 0$$

oberoende av θ. I det första gränsvärdet har vi åberopat ett standardgränsvärde och i det andra har vi utnyttjat att den andra faktorn är begränsad.

Eftersom f har gränsvärde 0 i origo kan vi utvidga f till en kontinuerlig funktion genom att sätta

$$F(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^2\ln(x^4+y^4) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

för då gäller $F(x,y) = f(x,y)$ utanför origo, medan $\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = F(0,0)$.

(b) Då funktionen f och därmed F är symmetriska i x och y räcker det att undersöka $\frac{\partial F}{\partial x}$. Utanför $(0,0)$ har vi $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$ och medelst derivering med hjälp av produktregeln och kedjeregeln fås

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x(x^2+y^2)\ln(x^4+y^4) + \frac{4x^3(x^2+y^2)^2}{x^4+y^4}.$$

Denna funktion inses vara kontinuerlig när $(x,y)\neq(0,0)$. En ny räkning i polära koordinater visar att $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0$. I origo har vi

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{F(h,0)-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^4\ln h^4}{h} = \lim_{h\to 0} 4h^3\ln h = 0$$

vilket visar att $\frac{\partial F}{\partial x}$ är kontinuerlig även i denna punkt, således i hela $\mathbb{R}^2$.

3. Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen

$$f(x,y) = 17 + e^{x+y}(xy-x)$$

samt avgör deras karaktär.

Lösningsförslag

Vi noterar att f har partiella derivator av alla ordningar. Partiell derivering ger

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x+1)(y-1)e^{x+y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xye^{x+y}.$$

Dåexponentialfunktionen är nollskild för alla reella argument får vi att $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ om $x=-1$ eller $y=1$ medan $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ om $x=0$ eller $y=0$. Vi får således de stationära punkterna $(-1,0)$ samt $(0,1)$.

Vi beräknar de partiella derivatorna av ordning två och får

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (x+2)(y-1)e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = (x+1)ye^{x+y} \quad \text{och}\frac{\partial f}{\partial y^2} = x(y+1)e^{x+y}$$

Observera att $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 0$ vilket genast ger att $(0,1)$ är en sadelpunkt. I $(-1,0)$ fås den associerade kvadratiska formen $-h^2-k^2$, som är negativt definit, vilket i sin tur medför att f har ett lokalt maximum i $(-1,0)$.

4. (a) Förklara varför funktionen $f(x,y) = 2xy-2y-2$ antar ett största och ett minsta värde under bivillkoret $x^2+2y^2 = 2x$.

(b) Bestäm dessa värden samt ange i vilka punkter de antas.

Lösningsförslag

(a) Funktionen f är ett polynom i två variabler och således kontinuerlig på $\mathbb{R}^2$. Sätt $g(x,y) = x^2 - 2x + 2y^2$ och skriv nu

$$x^2-2x+2y^2 = (x-1)^2 - 1 + 2y^2$$

så att bivillkoret $g(x,y) = 0$ kan uttryckas som $(x-1)^2+2y^2 = 1$. Det senare beskriver en ellips, en sluten och begränsad och således kompakt mängd. Enligt en känd sats antar därmed f ett största och ett minsta värde under det givna bivillkoret.

(b) Låt oss beräkna gradienterna för funktionerna f och g. Detta ger

$$\mathrm{grad} f = (2y, 2x-2) \quad \mathrm{grad} g = (2x-2, 4y).$$

Vi har att $\mathrm{grad} g \neq 0$ på $g(x,y)=0$. Ty den andra komponenten försvinner endast om om $y=0$, vilket i sin tur framtvingar $x=0$ eller $x=2$, men då är första komponenten i $\mathrm{grad} g$ lika med -2 respektive 2.

Vi får således stationära punkter till problemet där $\mathrm{grad} f$ och $\mathrm{grad} g$ är parallella. För att bestämma dessa punkter kan vi undersöka när

$$\begin{vmatrix} 2y & 2x-2 \\ 2x-2 & 4y \end{vmatrix} = 0$$

det vill säga $8y^2 - (2x-2)^2 = 0$ eller efter förenkling $2y^2 - (x-1)^2 = 0$. Vi sätter in $2y^2 = x^2 - 2x + 1$ i bivillkoret, vilket ger

$$2x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Medelst kvadratkomplettering erhåller vi de två lösningarna $x_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $x_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Genom att utnyttja sambandet $y^2 = (x-1)^2/2$ får vi nu fyra stationära punkter, nämligen

$$\vec{p_1} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \quad \vec{p_2} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right), \quad \vec{p_3} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{och} \quad \vec{p_4} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right).$$

Det återstår endast att evaluera f i dessa punkter. Vi får

$$f(\vec{p_1}) = f(\vec{p_4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 2$$

vilket ger funktionens största värde under bivillkoret. Vidare har vi

$$f(\vec{p_2}) = f(\vec{p_3}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - 2$$

vilket ger funktionens minsta värde under bivillkoret.

5. Betrakta funktionen

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{x+y+z}$$

på mängden $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0, y > 0, z > 0\}$.

Vad är supremum för f på D? Vad är infimum för f på D?

Lösningsförslag

Mängden D är öppen men inte begränsad. På D är samtliga variabler positiva, vilket betyder att både täljare och nämnare i f är positiva. Således är f en positiv funktion på D, vilket medför att $\inf_D f \geq 0$ men möjligtvis skulle det kunna vara så att $\inf_D f > 0$.

Låt oss visa att $\inf_D f = 0$. Låt oss först notera att $\{(x,x,x) \colon x > 0\} \subset D$. Sätt

$$g(x) = f(x,x,x) = \frac{x^3}{x+x+x} = \frac{x^2}{3}, \quad x > 0.$$

Eftersom $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ följer det att f antar godtyckligt små värden i D. Alltså är $\inf_D f = 0$.

Vi har även $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, vilket i sin tur betyder att f även antar godtyckligt stora värden i D. Därmed fås $\sup_D f = \infty$.

Teoridel

6. Visa att $\sin x < x < \tan x$ om $0 < x < \pi/2$ samt att $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

7. Definiera riktningsderivata och gradient. Formulera och bevisa sats om samband mellan riktningsderivata och gradient. Visa också att en funktion av flera variabler växer snabbast i gradientens riktning. (Endast funktioner av två variabler behöver behandlas.)

Skrivningen beräknas vara rättad onsdag 19 oktober 2022. Se kurshemsidan för information om återlämning.