MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del A
12 oktober 2023

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng och minst 7,5 poäng på problemdelen krävs för att gå vidare till den muntliga delen.

Problemdel

1. (a) Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier konvergerar absolut?

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \qquad (ii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2 \ln(e+k^2)}$$

   (b) Är följande generaliserade integral konvergent?

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 \ln(e+x^2)}$$

2. Beräkna följande gränsvärden eller visa att de inte existerar.

$$(a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y^2}{x^2+y^2} \qquad (b) \lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+xy} \qquad (c) \lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},0)} \frac{\sin(x+y)}{x^4+y^4}$$

3. Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen

$$f(x,y) = e^y(x^2y + x^2 + y)$$

   samt avgör deras karaktär.

4. (a) Förklara varför funktionen $f(x,y) = 1 - xy$ antar ett största och ett minsta värde under bivillkoret $a^2x^2 + y^2 = 1$ när $a > 0$.

   (b) Bestäm för varje $a > 0$ dessa värden samt ange i vilka punkter de antas.

   (c) Antar f ett största och ett minsta värde under bivillkoret om istället $a = 0$?

5. Betrakta funktionen

$$f(x,y,z) = e^{x^2+y^2-xyz}$$

   på mängden $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$.

   Vad är supremum för f på D? Vad är infimum för f på D?

Teoridel

6. Visa att $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

7. Formulera och bevisa Cauchys rotkriterium och d'Alemberts kvotkriterium för serier.

Skrivningen beräknas vara rättad måndag august 28 2023. Se kurshemsidan för information om återlämning.