9.30 Är (x^3-3xy^2, y^3-3x^2y) konservativ i $\mathbb{R}^2$?
Vad är potential U?

$$\frac{\partial}{\partial x}(y^3-3x^2y) = -6xy$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3-3xy^2) = -6xy$$

$\Rightarrow$ konservativt ty $\mathbb{R}^2$ enkelt sammanhängande

$$U = \int (x^3-3xy^2)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + \psi(y)$$
$$U'_y = -3x^2y + \psi'(y) = y^3 - 3x^2y$$
$$\Leftrightarrow \psi'(y) = y^3$$
$$\Leftrightarrow \psi(y) = \frac{y^4}{4} + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

så $U(x,y) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} + C$

9.33 Visa att det existerar $g(y)$ så att
$g(y)\,(2xy\,dx - (y^2+3a^2-3x^2)dy)$ är differential av en funktion U

Ange g, U

Vi har formen $g(y)2xy\,dx - g(y)(y^2+3a^2-3x^2)\,dy$

$$\frac{\partial}{\partial x}(-g(y)(y^2+3a^2-3x^2)) = 6x\,g(y)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(g(y)2xy) = 2x\,g(y) + 2xy\,g'(y)$$

Så måste ha $2x\,g(y) + 2xy\,g'(y) = 6x\,g(y)$

$$\Rightarrow 2xy\,g'(y) = 4x\,g(y)$$
$$\Rightarrow \frac{g'(y)}{g(y)} = \frac{2}{y}$$
$$\Rightarrow \int \frac{g'(y)\,dy}{g(y)} = \int \frac{2}{y}\,dy$$
$$\Rightarrow \ln(g(y)) = 2\ln(y) + C \qquad C \text{ konstant}$$
$$\Rightarrow g(y) = e^{2\ln(y)+C} = y^2e^C = \tilde{C}y^2 \qquad \tilde{C} = e^C$$

Så vi har formen $2\tilde{C}xy^3 - \tilde{C}(y^4+3a^2y^2-3x^2y^2)\,dy$

$$U = \int 2\tilde{C}xy^3\,dx = \tilde{C}x^2y^3 + \psi(y)$$
$$U'_y = \tilde{C}3x^2y^2 + \psi'(y) = -\tilde{C}(y^3+3a^2y^2-3x^2y^2)$$
$$\Leftrightarrow \psi'(y) = -\tilde{C}(y^4+3a^2y^2)$$
$$\Leftrightarrow \psi(y) = -\tilde{C}\frac{y^5}{5} - \tilde{C}a^2y^3 + \hat{C} \qquad \hat{C} \in \mathbb{R}$$

så $U(x,y) = \tilde{C}x^2y^3 - \tilde{C}\frac{y^4}{4} - \tilde{C}a^2y^3 + \hat{C}$, $\tilde{C}, \hat{C}$ konstanter

9.40 Beräkna $\int_\gamma 2xye^{x^2+y}\,dx + (1+y)e^{x^2+y}\,dy$
Där γ linjestycket $(0,0)$ till $(1,1)$

$U(x,y) = \int 2xy\,e^{x^2+y}dx = ye^{x^2+y} + \psi(y)$

$U'_y = e^{x^2+y} + ye^{x^2+y} + \psi'(y) = (1+y)e^{x^2+y} \Rightarrow \psi'(y)=0 \Rightarrow \psi(y) = C$ konstant

så $U(x,y) = ye^{x^2+y}$ är en potential

$\int_\gamma 2xye^{x^2+y}dx + (1+y)e^{x^2+y}dy = U(1,1) - U(0,0) = 1\cdot e^{1^2+1} - 0\cdot e^{0^2+0} = e^2$

B68 $\omega = (\sin(xy) + xy\cos(xy) + 2x)dx + (x^2\cos(xy) + e^y)dy$

a) Är ω exakt?

$U = \int(\sin(xy) + xy\cos(xy) + 2x)dx = -\frac{1}{y}\cos(xy) + x^2 + \int xy\cos(xy)\,dx$

$= -\frac{1}{y}\cos(xy) + x^2 + \sin(xy)x - \int \sin(xy)\,dx$

$= -\frac{1}{y}\cos(xy) + x^2 + \sin(xy)x - \frac{-1}{y}\cos(xy) + \psi(y)$

$= x^2 + x\sin(xy) + \psi(y)$

$U'_y = x^2\cos(xy) + \psi'(y) = e^y \Rightarrow \psi'(y) = e^y \Rightarrow \psi(y) = e^y + C$ konstant C

så ω har potential $U(x,y) = x^2\cos(xy) + e^y$

b) Beräkna $\int_C \omega$ där C är kurvan längs hyperbeln $9y^2 - x^2 = 1$ från $(0,\frac{1}{3})$ till $(2\sqrt{2},1)$

$\int_C \omega = U(2\sqrt{2},1) - U(0,\frac{1}{3}) = 8\cos(2\sqrt{2}) + e - e^{\frac{1}{3}}$

c) Ange kurva γ_1 sådan att $\int_{\gamma_1}\omega = e-1$

$U(0,1) = e$ och $U(0,0) = 1$ så kan ta linjestycket $(0,0)$ till $(0,1)$

d) Ange γ_2 så $\int_{\gamma_2}\omega = 1-e$

Ta $-\gamma_1$

e) Ange γ_3 så $\int_{\gamma_3}\omega = 0$

Ta enhetscirkeln