10.63 $U=(y^2+2xz-yz^3,\ z^2+axy-xz^3,\ 2yz+x^2+bxyz^2)$ a, b konst

~~a) Bestäm a, b så U är konservativ~~

$$0=\operatorname{rot}U=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y^2+2xz-yz^3\\ z^2+axy-xz^3\\ 2yz+x^2+bxyz^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2z+bxz^2-(2z-3xz^2)\\ 2x-3yz^2-(2x+byz^2)\\ ay-z^3-(2y-z^3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(b+3)z^2\\ -(3+b)yz^2\\ (a-2)y\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a=2,\ b=-3$

~~b) bestäm för dessa a, b en potential till U~~

$$F=\int(y^2+2xz-yz^3)\,dx=xy^2+x^2z-xyz^3+\varphi(y,z)$$

$$z^2+2xy-xz^3=F'_y=2xy-xz^3+\varphi'(y,z)\Rightarrow\varphi'(y,z)=z^2$$
$$\Rightarrow\varphi(y,z)=yz^2+\psi(z)$$

$$F=xy^2+x^2z-xyz^3+yz^2+\psi(z)$$

$$2yz+x^2-3xyz^2=F'_z=x^2-3xyz^2+2yz\Rightarrow\psi'(z)=0\Rightarrow\psi(z)=C$$

Kan ta $F=xy^2+x^2z-xyz^3+yz^2$

c) Beräkna för dessa värden på a, b arbetet fältet uträttar längs en kurva γ från $(1,0,1)$ till $(2,1,0)$

$$\int_\gamma U\,dr=F(2,1,0)-F(1,0,1)=2-1=1$$

10.67 Är $F=\dfrac{(-y,x,0)}{x^2+y^2}$ konservativ a) utanför z-axeln, b) i området x<0

a) γ: $r(t)=(\cos(t),\sin(t),0)$ $t\in[-\pi,\pi]$ (ligger utanför z-axeln)

$$\int_\gamma F\cdot dr=\int_{-\pi}^{\pi}(-\sin(t),\cos(t),0)\cdot(-\sin(t),\cos(t),0)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^2(t)+\cos^2(t))\,dt$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}dt=2\pi\neq0$$ så ej konservativ

b) Området är enkelt sammanhängande

$$\operatorname{rot}F=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{-y}{x^2+y^2}\\ \frac{x}{x^2+y^2}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-0\\ 0-0\\ \frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}-\left(\frac{-1}{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\end{pmatrix}=0$$

Alltså är F konservativ

K1 Avgör vilka funktioner är analytiska

a) $2xy + i(x^2 - y^2)$: $\quad u = 2xy \quad v = x^2 - y^2$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -2y$ ej analytisk

b) $2xy + x + i(y^2 + y - x^2)$: $\quad u = 2xy + x \quad v = y^2 + y - x^2$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y + 1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y + 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = -(-2x) = 2x$ analytisk

(ges av $z - iz^2$)

c) $x^2 - y^2 + i(x^2 + y^2)$: $\quad u = x^2 - y^2 \quad v = x^2 + y^2$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$

d) $-e^x \sin(y) + i e^x \cos(y)$: $\quad u = -e^x \sin(y) \quad v = e^x \cos(y)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^x \sin(y) \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -e^x \sin(y) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \cos(y) \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \cos(y)$ analytisk

(ges av ie^z)

K2 beräkna $\int_\Gamma z e^{z^2} dz$ där Γ kurvan $z(t) = t + i\sin(t) \quad 0 \le t \le \pi$

$\int z e^{z^2} dz = \int e^{z^2} \frac{d(z^2)}{2} = \frac{e^{z^2}}{2}$

Γ går från $z(0) = 0 + i\sin(0) = 0$, $z(\pi) = \pi + i\sin(\pi) = \pi$

$\int_\Gamma z e^{z^2} dz = \frac{e^{\pi^2}}{2} - \frac{e^{0^2}}{2} = \frac{1}{2}(e^{\pi^2} - 1)$

K23 Visa att om $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ är analytisk så är $\Delta u = \Delta v = 0$

$u''_{xx} = (u'_x)'_x = (v'_y)'_x = v''_{yx}$, $\quad u''_{yy} = (u'_y)'_y = (-v'_x)'_y = -v''_{xy}$

$\Rightarrow \Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = v''_{yx} - v''_{xy} = 0$

$v''_{xx} = (v'_x)'_x = (-u'_y)'_x = -u''_{yx}$, $\quad v''_{yy} = (v'_y)'_y = (u'_x)'_y = u''_{xy}$

$\Rightarrow \Delta v = v''_{xx} + v''_{yy} = -u''_{yx} + u''_{xy} = 0$

K24 a) Bestäm analytisk $f(z)$ med realdel $u = xy$ eller visa att ingen sådan existerar

$v = \int v'_x dx = \int -u'_y dx = \int -2x dx = -x^2 + \varphi(y)$

$\varphi'(y) = v'_y = u'_x = 2y \Rightarrow \varphi(y) = y^2 + C \Rightarrow v = -x^2 + y^2 + C$

b) Bestäm analytisk $f(z)$ med imaginärdel $v = x^2 + y^2$ eller visa att ingen existerar

$\Delta v = 2 + 2 = 4 \neq 0$ så existerar ej