k13 Visa att följande serier konvergerar i $\mathbb{R}$ och att konvergensen är likformig i $[-a,a]$ för alla $a>0$

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^2}{1+k^2x^2}$

$|x|\le a$: $\left|\frac{x^2}{1+k^2x^2}\right| = \frac{1}{\frac{1}{x^2}+k^2} \le \frac{1}{\frac{1}{a^2}+k^2}$ eftersom $\frac{1}{\frac{1}{t}+k^2}$ växande i t

serien konvergerar likformigt för $x\le|a|$ p.g.a Weierstrass Majorantsats

Alltså konvergerar funktion i $\mathbb{R}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x+\sin(kx)}{1+k^2}$

$|x|\le a$: $\frac{|x+\sin(kx)|}{1+k^2} \le \frac{|x|+|\sin(kx)|}{1+k^2} \le \frac{a+1}{1+k^2}$

likformig konvergens för $|x|\le a$ p.g.a Weierstrass Majorantsats

k15 Visa att serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k^2}$ inte är likformigt konvergent i $\mathbb{R}$

$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^2}{k^2}$, Behöver visa att $S_n(x)$ ej konvergerar likformigt

$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|S_n(x) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{k^2}\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^2}{k^2}\right| \ge \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{x^2}{(n+1)^2} = \infty$

så S_n konvergerar ej likformigt

k16 Utveckla $\frac{1}{2-x}$ som potensserie i origo. För vilka x konvergerar?

$\frac{1}{2-x} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{2^{k+1}}$ för $-1<\frac{x}{2}<1 \iff -2<x<2$

k17 Utveckla $\frac{x^3}{1-2x^2}$ som en potensserie i origo. För vilka x konvergerar den?

$\frac{x^3}{1-2x^2} = x^3\sum_{k=0}^{\infty}(2x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^{2k+3}$ för $-1<2x^2<1 \iff -\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$

K18 Beräkn $\sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)x^k$. För vilka x konvergerar den

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)(k+2)}{k(k+1)} = 1+\frac{2}{k} \to 1 \quad \text{då } k \to \infty$$

så konvergerar för $|x|<1$

För $|x| \geq 1$: $|k(k+1)x^k| \to \infty$ så konvergerar ej

För $|x|<1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)x^k = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)t^k dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x k(k+1)t^k dt\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k+1}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=-1}^{\infty}(k+1)x^{k+2}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d}{dx}\left(\int_0^x\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)t^k dt\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+1}\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(x^2\frac{1}{(1-x)^2}\right) = \frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

$$= \frac{2x}{(1-x)^3}$$

K20 Beräkna $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k+3}$, för vilka x konvergerar serien

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{1}{k+4}}{\frac{1}{k+3}} \to 1$$ så konvergerar för $|x|<1$ och konvergerar ej för $x>1$

För $x=1$ fås $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+3}$ som ej konvergerar

För $x=-1$ fås $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+3}$ som konvergerar

$|x|<1$; $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k+3} = \frac{1}{x^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k+3}}{k+3} =$ upp till konstant

Där $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k+3}}{k+3} = \int\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k+3}}{k+3}dx = \int\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{k+3}}{k+3}\right)dx = \int\sum_{k=1}^{\infty}x^{k+2}dx = \int\frac{x^3}{1-x}dx$$

$$= \int\left(-x^2-x-1+\frac{1}{1-x}\right)dx = -\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x+\ln(1-x)+C$$

vi har $$0 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k+3}}{k+3}\Big|_{x=0} = -\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x-\ln(1-x)+C\Big|_{x=0} = C$$

så $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k+3} = \frac{1}{x^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k+3}}{k+3} = \frac{1}{x^3}\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x-\ln(1-x)\right).$$

vill visa att denna formel gäller även i -1 dvs att vi har kontinuitet

Låt $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k+3} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m-1}}{2m-1+3}+\frac{x^{2m}}{2m+3}$ eftersom serien konvergerar

vill visa att vi har likformig konvergens för den här serien

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{2m+2}}{2m+2}+\frac{x^{2m+3}}{2m+3}\right) = x^{2m+1}+x^{2m+2} = (1+x)x^{2m+2} \Rightarrow \text{maximum i } x=-1$$

så $$\left|\frac{x^{2m-1}}{2m+2}+\frac{x^{2m}}{2m+3}\right| = \left|\frac{1}{x^3}\right|\left|\frac{x^{2m+2}}{2m+2}+\frac{x^{2m+3}}{2m+3}\right| \leq 8\left|\frac{(-1)^{2m+2}}{2m+2}+\frac{(-1)^{2m+3}}{2m+3}\right|$$

$$= 8\frac{1}{(2m+2)(2m+3)}$$ så likformig konvergens p.g.a. Weierstrass