3.21 Beräkna följande integraler där Γ är cirkeln $|z|=2$ (moturs)

$\int_\Gamma \frac{\cos(z)}{z^3}$: $\int_\Gamma \frac{\cos(z)}{z^3}dz = \int_\Gamma \frac{1-\frac{z^2}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}}{z^3}dz$

$= \int_\Gamma \left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k-3}}{(2k)!}\right)dz = -\frac{1}{2}2\pi i = -\pi i$

$\int_\Gamma \frac{e^z}{(z-1)^2}dz$: $\int_\Gamma \frac{e^z}{(z-1)^2}dz = \int_\Gamma e\frac{e^{z-1}}{(z-1)^2}dz = e\int_\Gamma \frac{1+(z-1)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(z-1)^k}{k!}}{(z-1)^2}dz$

$= e\int_\Gamma \left(\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(z-1)^{k-2}}{k!}\right)dz = e\,2\pi i$

$\int_\Gamma \frac{e^z}{(z-\frac{\pi}{2}i)^2}dz$: $\int_\Gamma \frac{e^z}{(z-\frac{\pi}{2}i)^2}dz = \int_\Gamma e^{\frac{\pi}{2}i}\frac{e^{z-\frac{\pi}{2}i}}{(z-\frac{\pi}{2}i)^2}dz = i\int_\Gamma \frac{1+(z-\frac{\pi}{2}i)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(z-\frac{\pi}{2}i)^k}{k!}}{(z-\frac{\pi}{2}i)^2}dz$

$= i\,2\pi i = -2\pi$

3.6 Beräkna integralen $\int_\Gamma \frac{e^z}{z^2(z+3i)}dz$ där Γ är en positivt orienterad

$|z|<3$: $\frac{e^z}{z+3i} = \frac{1}{3i}\frac{e^z}{1+\frac{z}{3i}} = \frac{1}{3i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3i}\right)^k\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$

$= \frac{1}{3i}\left(1+\left(1-\frac{1}{3i}\right)z\right) + \sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$ för några a_k

a) Γ: $|z+i|=1$

$|0+i|=1$ så har pol på cirkeln $\Rightarrow$ integralen ej definerad

b) Γ: $|z+2i|=1$

$|0+2i|=2>1$, $|-3i+2i|=1$ så har pol på cirkeln $\Rightarrow$ ej definerad

c) Γ: $|z+2|=25$

$|0+2|=2<25$, $|-3i+2|=\sqrt{13}$ $\Rightarrow$ båda polerna inom cirkeln

$\int_\Gamma \frac{e^z}{z^2(z+3i)}dz = \int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2(z+3i)}dz + \int_{|z+3i|=1}\frac{e^z}{z^2(z+3i)}dz$

$= \int_{|z|=1}\left(\frac{1}{3i}\frac{1}{z^2} + \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3i}\right)\frac{1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty}a_k z^{k-2}\right)dz + 2\pi i\frac{e^{-3i}}{(-3i)^2}$

$= 2\pi i\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3i}\right) - 2\pi i\frac{e^{-3i}}{9} = \frac{2\pi}{3}\left(1+\frac{i}{3}-\frac{e^{-3i}}{3}\right)$

d) $|z-2i|=1$:

$|0-2i|=2>1$, $|-3i-2i|=5>1$ $\Rightarrow$ ingen pol inom cirkeln

$\int_\Gamma \frac{e^z}{z^2(z+3i)}dz = 0$

B137 Lös $y''-y=0$, $y(0)=y'(0)=1$ med hjälp av potensserie

$y(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \qquad a_0=a_1=1$

$0=y''(z)-y(z)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\,a_k z^{k-2}-\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k=\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}z^k-\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$

$=\sum_{k=0}^{\infty}\left((k+2)(k+1)a_{k+2}-a_k\right)z^k$

$\Rightarrow a_{k+2}=\frac{1}{(k+2)(k+1)}a_k \quad \Rightarrow \quad a_k=\frac{1}{k(k-1)}a_{k-2}\ ,\ k\geq 2$

k	0	1	2	3	4
a_k	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$

Gissa $a_k=\frac{1}{k!}$

Om $a_k=\frac{1}{k!}$ för $0\leq k<n$ så

$\Rightarrow a_n=\frac{1}{n(n-1)}a_{n-2}=\frac{1}{n(n-1)}\frac{1}{(n-2)!}=\frac{1}{n!}$

Av induktion följer att $a_k=\frac{1}{k!}$ för alla $k\geq 0$

så $y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k=e^z$

B134 Bestäm alla $z\in\mathbb{C}$ för vilka följande serier konvergerar

i) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2(n!)}$: $\quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\frac{1}{2(n+1)!}}{\frac{1}{2n!}}=\frac{1}{n+1}\to 0$ så konvergerar för alla z

ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^{2n}}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$: $\quad$ sätt $w=(z-1)^2$ så för $\sum\frac{w^n}{(1+\frac{1}{n})^{n}}$

då är $\sqrt[n]{a_n}=(1+\frac{1}{n})\to 1$

för $|w|=1$ så är $\left|\frac{w^n}{(1+\frac{1}{n})^n}\right|=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{1}{e}\neq 0$

Alltså konvergerar serien omm $|w|<1$ dvs $|z-1|<1$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n(z+2)^n$: $\quad \sqrt[n]{a_n}=n\to\infty$ så konvergerar endast för $z=-2$