Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Matematiska metoder för naturvetare, MM2004, den 13 januari 2023

1. (a) Vi skriver om olikheten

$$\frac{2}{2x-1} < \frac{1}{x+3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+3} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7}{(2x-1)(x+3)} < 0$$

så vi kan ställa upp en teckentabell

x		-3		$1/2$	
$2x-1$	$-----$	$-$	$-----$	0	$+++++$
$x+3$	$-----$	0	$+++++$	$+$	$+++++$
$\frac{7}{(2x-1)(x+3)}$	$+++++$	$\wr$	$-----$	$\wr$	$+++++$

Vi ser att $\dfrac{7}{(2x-1)(x+3)}$ är negativt precis då $-3 < x < 1/2$, vilket därmed är vårt svar.

(b) Man ser att f har definitionsmängd $\mathbb{R}$, och värdemängd $]1, \infty[$, så för $y > 1$ får vi

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{e^{x-3}}{2} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y - 1 = \frac{e^{x-3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2y - 2 = e^{x-3}$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln(2y-2) = x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(2y-2) + 3.$$

Funktionen f är därmed inverterbar, och $f^{-1}(y) = \ln(2y-2) + 3$ för $y > 1$. Svaret är alltså att $f^{-1}(x) = \ln(2x-2) + 3$ för $x > 1$.

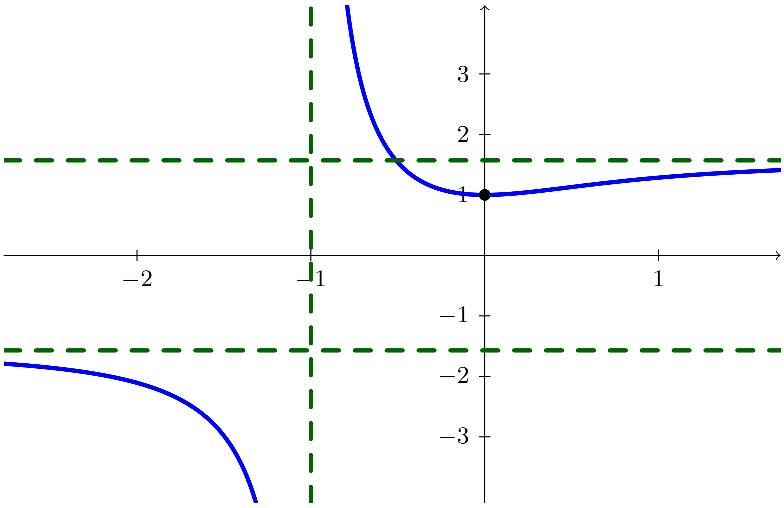
2. Den kontinuerliga funktionen $f(x) = \arctan(x) + \frac{1}{x+1}$ är definierad då $x \neq -1$. Den enda möjliga vertikala asymptoten är därmed $x = -1$, och eftersom vi får $\lim_{x \to -1-} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x \to -1+} f(x) = \infty$ så $x = -1$ är en asymptot. Vi får vidare att $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\pi/2$, så $y = \pi/2$ och $y = -\pi/2$ är horisontella asymptoter. Derivering ger

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2},$$

så $f'(x) = 0$ endast för $x = 0$. Vi gör en teckentabell

x		-1		0	
$f'(x)$	$-$	$\wr$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\wr$	$\searrow$	1	$\nearrow$

Från teckentabellen ser vi att funktionen bara har en lokal extrempunkt, ett lokalt minimum för $x = 0$. Vi kan nu skissa grafen:



3. (a) Vi börjar med att lösa den homogena ekvationen $y_h'' + 4y_h = 0$. Den karakteristiska ekvationen är $m^2 + 4 = 0$, med lösningar $m = \pm 2i$, så $y_h = A\sin(2x) + B\cos(2x)$, för $A, B \in \mathbb{R}$.

Vi ansätter en partikulärlösning på formen $y_p = ax^2 + bx + c$, så $y_p'' = 2a$ så vi får $y_p'' + 4y_p = 4a^2 + 4bx + (4c + 2a)$ vilket skall vara lika med x^2, vilket betyder att $a = 1/4$, $b = 0$ och $c = -1/8$, så $y_p = (2x^2 - 1)/8$.

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är därmed

$$y = y_p + y_h = \frac{2x^2 - 1}{8} + A\sin(3x) + B\cos(3x).$$

(b) Differentialekvationen $y' = x^2 e^{-3y}$ är separabel. Om vi skriver om den som $e^{3y}y' = x^2$ och integrerar båda sidor får vi att $\frac{e^{3y}}{3} = \frac{x^3}{3} + C$ Utnyttjar vi begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ får vi $C = 1/3$, vilket ger att $e^{3y} = x^3 + 1$, så $y = \frac{\ln(x^3+1)}{3}$.

Lösningen är definierad då $x^3 + 1 > 0$, dvs på intervallet $]-1, \infty[$.

4. (a) Koefficientmatrisens determinant är

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [\text{utveckla efter kolonn 3}] = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 2.$$

(b) Om $a = 2$ är ekvationssystemets totalmatris

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot -1/2 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vi ser att z blir en fri variabel. Sätter vi $z = t$, får vi $y = 3/2 + z/2 = (3+t)/2$, och $x = 4 - 2y = 1 - t$, så ekvationssystemets lösningar ges av

$$(x, y, z) = (1 - t, (3 + t)/2, t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

5. (a) Varje enhet blir felfri med sannolikhet $1 - 0.10 = 0.90$. Enheterna blir felfria oberoende av varandra så sannolikheten att alla tio enheter blir felfria är $0.90^{10} \approx 0.35$.
Kan även beräknas med formeln för binomialfördelningen.

   (b) Låt X vara antal felaktiga enheter av de tio tillverkade. Då är $X \sim Bin(n = 10, p = 0.10)$ och

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} 0.1^2 0.9^8 \approx 0.19.$$

   (c) Låt X vara antal felfria enheter av de 230 tillverkade. Då är $X \sim Bin(n = 230, p = 0.90)$ med väntevärde $\mu = E(X) = 230 \cdot 0.90 = 207$ och standardavvikelse $\sigma = D(X) = \sqrt{230 \cdot 0.90 \cdot 0.10} \approx 4.55$. Med stöd av centrala gränsvärdessatsen är X approximativt normalfördelad med väntevärde $\mu = 207$ och standardavvikelse $\sigma = 4.55$ och den sökta sannolikheten blir

$$\begin{aligned} P(X \geq 200) &= 1 - P(X < 200) = 1 - \Phi\left(\frac{200 - 207}{4.55}\right) \\ &= 1 - (1 - \Phi(1.54)) = \Phi(1.54) = 0.9382 \approx 0.94. \end{aligned}$$

Använder man halvtalskorrektion blir sannolikheten 0.95.

6. (a) Vi betecknar väntevärdena för kontroll- och behandlingsgrupp med μ_k respektive μ_b. Ett 95% konfidensintervall för $\mu_b - \mu_k$ beräknas med formeln

$$\bar{x}_b - \bar{x}_k \pm t_{0.025}(n_b + n_k - 2) s_p \sqrt{\frac{1}{n_b} + \frac{1}{n_k}} \quad \text{där} \quad s_p = \sqrt{\frac{(n_b - 1)s_b^2 + (n_k - 1)s_k^2}{n_b + n_k - 2}}.$$

Vi har $n_k = 4$ och $n_b = 5$ och beräknar medelvärden och varianser till $\bar{x}_k = (69.0 + \cdots + 65.7)/4 = 66.3$ och

$$s_k^2 = ((69.0 - 66.3)^2 + \cdots + (65.7 - 66.3)^2)/(4 - 1) = 5.820,$$

respektive $\bar{x}_b = (59.8 + \cdots + 60.5)/5 = 61.2$ och

$$s_b^2 = ((59.8 - 61.2)^2 + \cdots + (60.5 - 61.2)^2)/(5 - 1) = 9.625.$$

Ur tabell bestäms t-kvantilen som blir $t_{0.025}(7) = 2.36$. Med insatta värden beräknas den poolade standardavvikelsen till $s_p = 2.827$ och konfidensintervallet till -5.1 ± 4.48 eller $(-9.58, -0.62)$. Tolkning: Differensen $\mu_b - \mu_k$ är med sannolikhet 95% inom intervallet $(-9.58, -0.62)$.

   (b) Vi ställer upp följande hypoteser

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_b = \mu_k \Leftrightarrow \mu_b - \mu_k = 0 \\ H_1 &: \mu_b \neq \mu_k \Leftrightarrow \mu_b - \mu_k \neq 0. \end{aligned}$$

Om signifikansnivån väljs till $\alpha = 5\%$ kan testet göras med konfidensintervallet som beräknades i uppgift (a). Eftersom 0 inte ingår i intervallet ska H_0 förkastas. Behandling med substansen sänker den genomsnittliga enzymaktiviteten signifikant, på nivån $\alpha = 5\%$.