Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Matematiska metoder för naturvetare, MM2004, den 24 augusti 2023

1. (a) Vi skriver om olikheten

$$\frac{x-1}{x-3} \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x-3} - 2 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1-2(x-3)}{x-3} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5-x}{x-3} \le 0$$

så vi kan ställa upp en teckentabell

x		3		5	
$5-x$	$+++++$	$+$	$+++++$	0	$-----$
$x-3$	$-----$	0	$+++++$	$+$	$+++++$
$\frac{5-x}{x-3}$	$-----$	≀	$+++++$	0	$-----$

Vi ser att $\dfrac{5-x}{x-3} \le 0$ precis då $x < 3$ eller $x \ge 5$.

(b) Vi börjar med att bestämma skärningspunkterna mellan kurvorna. Ekvationen $\frac{2}{1+4x^2} = 1$, ger att $4x^2 = 1$, så $x = \pm\frac{1}{2}$. På intervallet mellan $x = -1/2$ och $x = 1/2$ är $\frac{2}{1+4x^2}$ den övre funktionen, så vi får att den sökta arean är

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{2}{1+4x^2} - 1 \right) dx = \left[u = 2x,\ dx = \frac{1}{2}\, du \right]$$

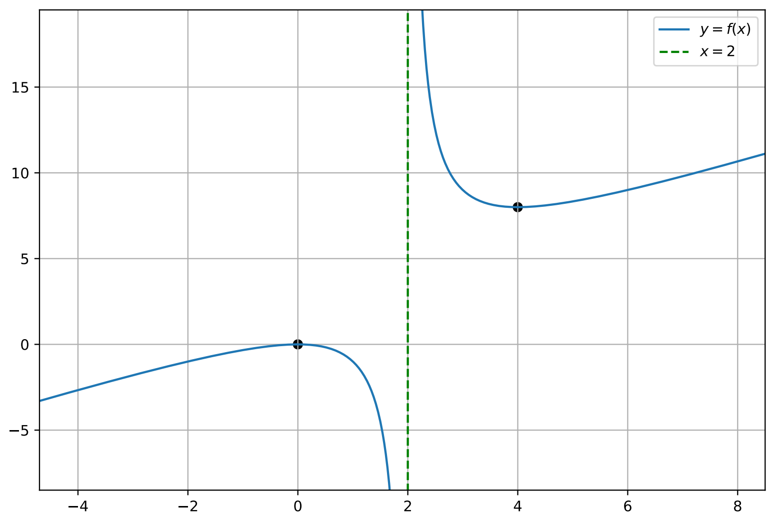
$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{1+u^2} - 1 \right) du = \frac{1}{2} \Big[2\arctan(u) - u \Big]_{u=-1}^{u=1} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

2. Den kontinuerliga funktionen $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ är definierad då $x \ne 2$. Det ger en enda möjlig vertikal asymptot, och eftersom vi får $\lim_{x\to 2-} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x\to 2+} f(x) = \infty$ så $x = 2$ är en asymptot. Vi får vidare att $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, eftersom täljaren har högre grad än nämnaren, så horisontell asymptot saknas.

Derivering ger $f'(x) = \frac{(x-2)2x - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$, så $f'(x) = 0$ för $x = 0$ och $x = 4$. Vi gör en teckentabell:

x		0		2		4	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	≀	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	≀	↘	8	↗

. Från teckentabellen ser vi att funktionen har ett lokalt maximum för $x = 0$, och ett lokalt minimum för $x = 4$. Globala extremvärden saknas. Vi skissar grafen:



3. (a) Vi får, om vi utvecklar efter första kolonnen efter en förberedande radoperation, att

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1.$$

(b) Vi får $(A \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = (E \mid A^{-1}), \text{ så } A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Vi får att $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. (a) Differentialekvationen är linjär. Om vi skriver om den på formen $y' + g(x)y = h(x)$ for vi $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}$, så $g(x) = \frac{1}{x}$, och därmed är den integrerande faktorn $e^{G(x)} = e^{\ln(x)} = x$, så vi får $(xy)' = 1$ vilket efter integrering ger $xy = x + C$. Allmänna lösningen är därmed $y(x) = 1 + \frac{C}{x}$, för $C \in \mathbb{R}$.

(b) Differentialekvationen $xy' = y^2$ är separabel. Om vi skriver om den som $\frac{1}{y^2}y' = \frac{1}{x}$ och integrerar båda sidor får vi att $\frac{-1}{y} = \ln(x) + C$ Utnyttjar vi begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ får vi $C = -1$, vilket ger att $\frac{1}{y} = 1 - \ln(x)$, så $y = \frac{1}{1-\ln(x)}$.

5. (a) Om komponentens livslängd som vi benämner X är exponentialfördelad med väntevärde 1500 timmar så är enligt formelbladet täthetsfunktionen för X

$$f(x) = \frac{1}{1500}e^{-x/1500},\ x \geq 0$$

och den sökta sannolikheten blir

$$P(X > 1350) = \int_{1350}^{\infty} \frac{1}{1500}e^{-x/1500}\,dx = e^{-1350/1500} = 0.4066$$

(b) Låt Y vara vara antalet av de sex komponenterna som fungerar efter 1350 timmar. Eftersom komponenterna fungerar oberoende av varandra och alla har sannolikhet 0.4066 att fungera efter 1350 timmar så är Y binomialfördelad med $n = 6$ och $p = 0.4066$ och den sökta sannolikheten blir

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) =$$

$$= 1 - \binom{6}{0}(1 - 0.4066)^6 - \binom{6}{1}0.4066^1(1 - 0.4066)^5 \approx 0.78$$

6. (a) Minsta kvadratskattningarna av parametrarna α och β i regressionsmodellen $y = \alpha + \beta x$ blir

$$\beta^* = S_{xy}/S_{xx} = -3509.4/3668.7 = -0.9566$$

och

$$\alpha^* = \bar{y} - \beta^* \bar{x} = 136.2 - (-0.9566) \cdot 1974.9 = 2025.4$$

Regressionsmodellen blir $y = 2025.4 - 0.9566x$, där x är år och y är antal isdagar per år.

(b) För år 1960 skattas väntevärdet av antal isdagar till $2025.4 - 0.9566 \cdot 1960 = 150.462 \approx 150$.

(c) Ett konfidensintervall för lutningen β med konfidensgrad $1-p$ beräknas enligt formelbladet med formeln

$$\beta^* \pm t_{p/2}(n-2)s/\sqrt{S_{xx}}.$$

Med $n = 35$ och $1 - p = 0.95$ får man konfidensintervallet

$$\beta^* \pm t_{0.025}(33)s/\sqrt{S_{xx}} = -0.9566 \pm 2.0345 \cdot 21.001/\sqrt{3668.7} = -0.9566 \pm 0.7054$$

eller ungefär $(-1.66, -0.25)$. Eftersom den övre gränsen är mindre än noll så har det genomsnittliga antalet isdagar per år minskat signifikant under perioden, för signifikansnivå 5%.