Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Matematiska metoder för naturvetare, MM2004, den 13 augusti 2024

1. (a) Vi skriver om olikheten

$$\frac{3x}{x-1} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x}{x-1} - 2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{x-1} \leq 0$$

så vi kan ställa upp en teckentabell

x		-2		1	
$x+2$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$
$x-1$	$---$	$-$	$---$	0	$+++$
$\dfrac{x+2}{x-1}$	$+++$	0	$---$	$\wr$	$+++$

Vi ser att $\dfrac{x+2}{x-1} \leq 0$ precis då $-2 \leq x < 1$, vilket därmed är vårt svar.

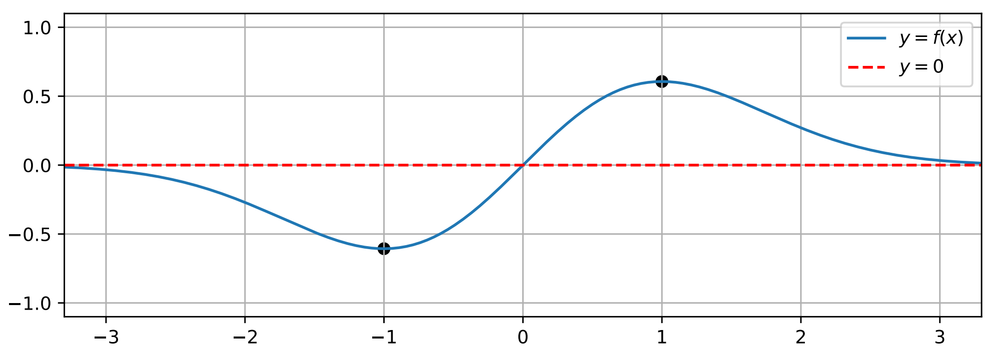
(b) Vi börjar med att bestämma skärningspunkterna mellan kurvorna. Ekvationen $\frac{2}{1+x^2} = x^2$, ger att $x^4 + x^2 = 2$. Sätter vi $x^2 = t$ får vi $t^2 + t - 2 = 0$, som (med pq-formeln) ger $t = 1$ eller $t = -2$. Detta ger att $x^2 = 1$ (eller $x^2 = -2$, som saknar reell lösning), så vi får att $x = \pm 1$.
På intervallet mellan $x = -1$ och $x = 1$ är $\frac{2}{1+x^2}$ den övre funktionen, så vi får att den sökta arean är

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{1+x^2} - x^2 \right) dx = \left[2\arctan(x) - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \pi - \frac{2}{3}.$$

2. Vi observerar att funktionen $f(x) = xe^{-x^2/2}$ är definierad och kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}$, därmed saknas vertikala asymptoter. Vi har $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x}{e^{x^2/2}} \right) = 0$ så $y = 0$ är en horisontell asymptot.
Vi får att $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$ så $f'(x) = 0$ för $x = \pm 1$. Vi gör en teckentabell:

x	$(-\infty)$		-1		1		$(-\infty)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\searrow$	$-1/\sqrt{e}$	$\nearrow$	$1/\sqrt{e}$	$\searrow$	(0)

Från denna ser vi att funktionen har ett globalt minimum för $x = -1$, och och ett globalt maximum för $x = 1$. Vi skissar grafen:



3. (a) Vi får, om vi utvecklar efter första kolonnen efter en förberedande radoperation, att

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

(b) Vi får $(A \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 1 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot -1 \\ \mid \cdot -1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

$= (E \mid A^{-1})$, så $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

(c) Vi får att $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. (a) Vi börjar med att bestämma en primitiv funktion

$$\int \frac{3}{(1+x)^2}\,dx = \int 3(1+x)^{-2}\,dx = -3(1+x)^{-1} + C,$$

så

$$\int_1^\infty \frac{3}{(1+x)^2}\,dx = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{-3}{1+x}\right]_1^N = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{-3}{1+N} + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

(b) Vi börjar med att lösa den homogena ekvationen $y_h'' - 3y_h' + 2y_h = 0$. Den karakteristiska ekvationen är $m^2 - 3m + 2 = 0$, med lösningar $m = 1$ och $m = 2$, så $y_h = Ae^x + Be^{2x}$, för $A, B \in \mathbb{R}$.

Vi ansätter en partikulärlösning på formen $y_p = ax + b$, så $y_p' = a$ och $y_p'' = 0$ så vi får $y_p'' - y_p' + 3y_p = 2ax + (2b - 6a)$ vilket skall vara lika med $4x$. Detta ger att $a = 2$, $b = 3$, så $y_p = 2x + 3$.

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är därmed

$$y = y_p + y_h = 2x + 3 + Ae^x + Be^{2x}$$

5. (a) Låt X vara antal celler i 5 mikroliter av cellsuspensionen. Då är

$$X \sim Po(\lambda = 5)$$

och sannolikheten att få precis 3 celler blir

$$P(X = 3) = \frac{5^3}{3!} e^{-5} = 0.140$$

(b) Låt X vara antal celler i 1 mikroliter av cellsuspensionen. Då är

$$X \sim Po(\lambda = 1)$$

och sannolikheten att få minst 1 cell blir

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{1^0}{0!} e^{-1} = 0.632$$

(c) Låt X vara antal celler i 50 mikroliter av cellsuspensionen. Då är

$$X \sim Po(\lambda = 50)$$

och approximativt normalfördelad med väntevärde $\mu = 50$ och standardavvikelse $\sigma = \sqrt{50}$. Sannolikheten att få mer än 60 celler blir

$$P(X > 60) = 1 - P(X \leq 60) \approx 1 - \phi\left(\frac{60 - 50}{\sqrt{50}}\right) 1 - \phi(1.302) = 1 - 0.9032 \approx 0.10$$

6. (a) Ett hypotestest av $H_0 : \mu = 1.5$ mot $H_1 : \mu \neq 1.5$ ska utföras med hjälp av ett 95% konfidensintervall för μ som är givet till 2.12 ± 0.47. Konfidensintervallets nedre och över gräns är $2.12 - 0.47 = 1.65$ respektive $2.12 + 0.47 = 2.59$ och eftersom nollhypotesens värde på μ inte finns med i det intervallet så ska nollhypotesen förkastas. Testets signifikansnivå är $1 -$ konfidensgraden $= 1 - 0.95 = 5\%$. Att konfidensintervallets nedre gräns är högre än 1.5 innebär att medelhalten av kadmium i avloppsslammet är signifikant högre än 1.5 milligram per kg, på signifikansnivå 5%.

(b) Ett konfidensintervall med konfidensgrad $1 - \alpha$ för ett väntevärde μ beräknas med formeln

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n - 1)s/\sqrt{n}$$

Med konfidensgrad 95% och $n = 5$ är, enligt tabell 5, $t_{0.025}(4) = 2.776$. Med konfidensgrad 1% ska i stället $t_{0.005}(4) = 4.604$ användas vilket innebär att felmarginalen ökar till $4.604 \cdot 0.47/2.776 = 0.78$. Ett 99% konfidensintervall för μ blir då 2.12 ± 0.78 eller $(1.34\ ,\ 2.90)$. Nollhypotesens värde $\mu = 1.5$ finns nu med i intervallet och nollhypotesen kan därför inte förkastas. Man kan alltså inte, på signifikansnivå 1%, påstå att medelhalten av kadmium i avloppsslammet är signifikant högre än 1.5 milligram per kg.