MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask
Kursansvarig: Bashar Saleh

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
30 november 2023

15p ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas.

Påminnelse. Kom ihåg att om $\mathbb{F}$ är en kropp så skriver vi

- $P_n(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av polynom av grad högst n med koefficienter i $\mathbb{F}$.
- $M_n(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av $n \times n$-matriser med element i $\mathbb{F}$.

Uppgifter.

1. (a) **(1p)** Låt V och W vara två vektorrum över en kropp $\mathbb{F}$ och låt $T\colon V \to W$ vara en linjär avbildning. Definiera bildrummet för T.

   (b) **(4p)** Låt $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ vara den linjära avbildningen som ges av

$$T(p(x)) = (2+2x)p(x) - x^2p'(x) - 2p''(x).$$

   Bestäm en bas för bildrummet för T, samt en bas för nollrummet för T.

Lösning. (a) Bildrummet för T, vanligtvis betecknat $R(T)$, ges av

$$R(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$$

(alternativt $R(T) = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ så att } T(v) = w\}$).

(b) Vi börjar med att bestämma matrisen $[T]_{st}$ för T relativt standardbasen $st = \{1, x, x^2\}$. Första kolonnen i $[T]_{st}$ ges av

$$[T(1)]_{st} = [(2+2x)\cdot 1 - x^2 \cdot 0 - 2\cdot 0]_{st} = (2,2,0)^t.$$

Andra kolonnen i $[T]_{st}$ ges av

$$[T(x)]_{st} = [(2+2x)\cdot x - x^2\cdot 1 - 2\cdot 0]_{st} = [2x + x^2]_{st} = (0,2,1)^t.$$

Tredje kolonnen i $[T]_{st}$ ges av

$$[T(x^2)]_{st} = [(2+2x)\cdot x^2 - x^2\cdot 2x - 2\cdot 2]_{st} = [-4+2x^2]_{st} = (-4,0,2)^t.$$

Sammantaget har vi att matrisen ges av

$$[T]_{st} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi finner nollrummet till matrisen ovan genom att lösa systemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right),$$

vilket ger att $N([T]_{st}) = \text{span}\{(2,-2,1)^t\}$. Vi har att $(2,-2,1)^t = [2-2x+x^2]_{st}$, som ger att $N(T) = \text{span}\{2-2x+x^2\}$, och därmed att $\{2-2x+x^2\}$ är en bas för nollrummet för T. Vi har då härlett att $N(T)$ har dimension 1

Enligt dimensionssatsen har vi att

$$\underbrace{\dim(N(T))}_{=1} + \dim(R(T)) = \underbrace{\dim(P_2(\mathbb{R}))}_{=3}$$

vilket ger att bildrummet, $R(T)$, har dimension 2. Bildrummet för T bestämms av kolonnrummet för $[T]_{st}$. Eftersom $\dim(R(T)) = 2$, så är dimensionen för kolonnrummet för $[T]_{st}$ också 2. De två första kolonnerna i $[T]_{st}$ är linjärt oberoende och utgör därför en bas för det 2-dimensionella kolonnrummet. Vi har därför att

$$R([T]_{st}) = \text{span}\{(2,2,0)^t, (0,2,1)^t\} = \text{span}\{(1,1,0)^t, (0,2,1)^t\}$$

vilket ger att

$$R(T) = \text{span}\{1+x, 2x+x^2\}.$$

Eftersom $\{1+x, 2x+x^2\}$ är linjärt oberoende, så är den en bas för $R(T)$. $\square$

2. (a) **(0.5p)** Definiera vad det innebär för en matris att vara normal.
   (b) **(0.5p)** Definiera vad det innebär för en matris att vara självadjungerad.
   (c) **(4p)** Betrakta följande matriser

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \pi^5 & \sqrt{14} \\ \sqrt{14} & \log(54) \end{pmatrix}.$$

(i) Vilka av matriserna ovan är diagonaliserbara när de betraktas som reella matriser?
(ii) Vilka av matriserna ovan är ortogonalt diagonaliserbara när de betraktas som reella matriser?
(ii) Vilka av matriserna ovan är ortogonalt diagonaliserbara när de betraktas som komplexa matriser?

Lösning. (a) En kvadratisk matris A är normal om $AA^* = A^*A$.

(b) En kvadratisk matris A är självadjungerad om $A^* = A$.

(c) **Matris** A: Vi har att det karakteristiska polynomet för A ges av

$$f_A(t) = \det(A - tI_2) = \begin{vmatrix} 1-t & 3 \\ -3 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 2t + 10,$$

vilket har nollställena $t = 1 \pm 3i$. Med andra ord har den inga reella egenvärden och kan inte vara reellt diagonaliserbar. Vi undersöker om A är ortogonalt diagonaliserbar som en komplex matris. Enligt spektralsatsen är en komplex matris A ortogonalt diagonaliserbar om och endast om den är normal, d.v.s $AA^* = A^*A$.

Vi har att

$$AA^* = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = A^*A,$$

vilket ger att A är ortogonalt diagonaliserbar betraktat som en komplex matris.

Matris B: Vi har att

$$f_B(t) = \det(B - tI_2) = (1-t)^2.$$

Det karakteristiska polynomet har ett egenvärde, nämligen $t = 1$, vilket ger att B är diagonaliserbar om och endast om egenrummet E_1 har dimension 2. Vi har

$$E_1 = N(B - I) = N\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span}\{(1,0)^t\}$$

Vi ser att E_1 har dimension 1 (oavsett underliggande kropp $\mathbb{F}$), och därmed inte diagonaliserbar, oavsett om den betraktas som en reell eller komplex matris.

Matris C: Vi har att

$$f_C(t) = \det(C - tI_2) = (1-t)(2-t).$$

Vi ser att C två distinkta egenvärden, $t = 1$ och $t = 2$, och är därmed diagonaliserbar som en reell matris. Den är inte självadjungerad och därmed inte diagonaliserbar betraktad som en reell matris (spektralsatsen för reella matriser). Den är inte heller är normal ty

$$CC^* = \left(\begin{array}{cc} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{array}\right) \neq \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 3 & 13 \end{array}\right) = C^*C$$

och därmed ej ortogonalt diagonaliserbar som en komplex matris (spektral satsen för komplexa matriser).

Matris D: Matrisen är självadjungerad och därmed ortogonalt diagonaliserbar som reell matris. Eftersom självadjungerade matriser är normala så är den också ortogonalt diagonaliserbar som en komplex matris.

Sammantaget har vi: (i) Matriserna C och D är diagonaliserbara som reella matriser. (ii) Matris D är ortogonalt diagonaliserbar betraktad som en reell matris. (iii) Matriserna A och D är ortogonalt diagonaliserbara betraktade som komplexa matriser. □

3. (a) **(2p)** Antag att en linjär operator $T\colon V \to V$ på ett ändligdimensionellt vektorrum V är både diagonaliserbar och inverterbar. Visa att även T^{-1} är diagonaliserbar.
   (b) **(2p)** Låt $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ vara givet av $T(A) = 3A - 2A^t$. Bestäm egenvärdena för T och baser för egenrummen för varje egenvärde.
   (c) **(1p)** Bestäm egenvärdena för T^{-1}.

Lösning. (a) Låt $\{v_1, \dots, v_n\}$ vara en bas för V beståendes av egenvektorer till T där v_i har egenvärde λ_i. Eftersom T är inverterbar, och därmed injektiv, så måste vi ha $\lambda_i \neq 0$.
Vi har att

$$T^{-1}(\lambda_i v_i) = T^{-1}(T(v_i)) = v_i = \frac{1}{\lambda_i}(\lambda_i v_i).$$

Detta innebär att $\lambda_i v_i$ är en egenvektor till T med egenvärde $\frac{1}{\lambda_i}$. Det följer av linjäritet att v_i är en egenvektor till T^{-1} med egenvärde $\frac{1}{\lambda_i}$. Detta innebär att $\{v_1, \dots, v_n\}$ vara en bas för V beståendes av egenvektorer till T^{-1}, vilket innebär att T^{-1} är diagonaliserbar.
(b) Vi bestämmer matrisen för T relativt standardbasen

$$st = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Vi har att första kolonnen i $[T]_{st}$ ges av

$$\left[T\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right]_{st} = \left[3\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}^t\right]_{st} = \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right]_{st} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

På liknande sätt får vi övriga kolonner i $[T]_{st}$ vilket ger

$$[T]_{st} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 3 & -2 & 0\\0 & -2 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Det karakteristiska polynomet för T ges av

$$f_T(t) = \det([T]_{st} - tI_4) = (1-t)^3(5-t),$$

vilket har nollställena $t = 1$ och $t = 5$. Vi har att E_1 bestäms av $N([T]_{st} - I_4)$:

$$N\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & -2 & 0\\0 & -2 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Detta ger att $E_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$. Eftersom $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ är linjärt oberiende så är den en bas för E_1.
Vi bestämmer E_5 genom att bestämma $N([T]_{st} - 5I_4)$:

$$N\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0 & 0\\0 & -2 & -2 & 0\\0 & -2 & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & -4\end{pmatrix} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Detta ger att $E_5 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\right\}$. En bas för E_5 är därmed $\left\{\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\right\}$.

(c) Eftersom egenvärdena för T är 1 och 5, så har vi enligt (a)-delen, att $\frac{1}{1} = 1$ och $\frac{1}{5}$ är egenvärdena för T^{-1}. $\square$

4. (a) **(1p)** Låt V vara ett inre produktrum. Hur definieras normen $\|v\|$ av ett element $v \in V$?
   (b) **(2p)** Betrakta inre produkten på $P_1(\mathbb{R})$ given av

   $$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^2 p(x)q(x)dx.$$

   Bestäm en ON-bas för $P_1(\mathbb{R})$ relativt denna inre produkt.
   (c) **(2p)** Avgör om den linjära operatorn $T\colon P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$, $T(p(x)) = xp'(x)$ är ortogonalt diagonaliserbar med avseende på inre produkten i (b)-delen.

Lösning. (a) Normen $\|v\|$ av ett element v i ett inre produktrum V ges av

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

(b) Vi applicerar Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess på standardbasen $\{1, x\}$ och får på så sätt en ON-bas $\{e_1, e_2\}$. Vi har att

$$\|1\|^2 = \int_0^2 1dx = [x]_0^2 = 2$$

vilket ger att

$$e_1 = \frac{1}{\|1\|}1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Låt $v_2^\perp$ vara den ortogonala projektionen av x på det ortogonala komplementet $\text{span}\{e_1\}^\perp$:

$$v_2^\perp = x - \langle x, e_1\rangle e_1 = x - \frac{1}{2}\int_0^2 xdx = x - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = x - 1$$

Normering av $v_2^\perp$ ger e_2:

$$\|v_2^\perp\|^2 = \langle x-1, x-1\rangle = \int_0^2 (x-1)^2\, dx = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad e_2 = \frac{1}{\|v_2^\perp\|}v_2^\perp = \sqrt{\frac{3}{2}}\,(x-1)\,.$$

(c) Vi bestämmer matrisen för T relativt ON-basen $\beta = \{e_1, e_2\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}(x-1)\right\}$. Vi har att $T(e_1) = T(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$ vilket get att första kolonnen i $[T]_\beta$ är trivialt. Vi har att

$$T(e_2) = T(\sqrt{\frac{3}{2}}(x-1)) = \sqrt{\frac{3}{2}}x = e_2 + \sqrt{3}e_1$$

vilket ger att andra kolonnen i $[T]_\beta$ ges av $(\sqrt{3}, 1)^t$. Sammantaget har vi att

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att $[T]_\beta$ inte är självadjungerad, vilket medför att T inte är självadjungerad. Från spektralsatsen följer det att T inte kan vara ortogonalt diagonaliserbar (då den inte är självadjungerad). $\square$

5. (a) **(1p)** Hur många nollskilda singulära värden har en inverterbar 7×7-matris?
   (b) **(4p)** Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

Lösning. (a) Antalet nollskilda singulära värden för en matris sammanfaller med matrisens rang. En inverterbar 7×7-matris har rang 7 och har därför 7 nollskilda singulära värden.

(b) Vi ska finna en singulärvärdesuppdelning på formen $A = U\Sigma V^*$. Vi har att

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

vars karakteristiska polynom ges av

$$f_{A^*A}(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 4 \\ 0 & 0-t & 0 \\ 4 & 0 & 8-t \end{vmatrix} = t^2(10-t).$$

Egenvärdena för A^*A ges av nollställena till $f_{A^*A}(t)$ vilka är $\lambda_1 = 10$ och $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Detta ger oss ett singulärt värde $\sigma_1 = \sqrt{10}$ som i sin tur ger att

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

För att bestämma V finner vi egenvektorer till A^*A som utgör en ON-bas för $\mathbb{C}^3$. Vi har att $E_{10} = N(A^*A - 10I_3)$ vilket ges av ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

vilket ger att $E_{10} = \operatorname{span}\{(1,0,2)^t\}$. Vi har att normen av $(1,0,2)^t$ ges av

$$\|(1,0,2)^t\| = \sqrt{\langle (1,0,2)^t, (1,0,2)^t \rangle} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

En ON-bas för E_{10} är därmed $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^t \right\}$.

På liknande sätt räknar vi ut att $E_0 = N(A^*A - 0I_2) = \operatorname{span}\{(-2,0,1)^t, (0,1,0)\}$ som har ON-bas $\left\{ \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^t, (0,1,0)^t \right\}$. Vi låter nu V vara matrisen med kolonner givna av ON-baserna för egenrummen:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$$

Nu räknar vi ut U genom att bestämma dess kolonner u_1, u_2, u_3. Låt v_i vara i:te kolonn i V, och då har vi att

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Eftersom vi inte har fler singulära värden så utvidgar vi $\{u_1\}$ till en ON-bas för $\mathbb{C}^3$ på valfritt sätt. Vi kan t.ex. direkt se att $(0,1,0)^t$ och $(-1,0,1)^t$ är ortogonala mot u_1 och ortogonala mot varandra. Genom att normera dem får vi $u_2 = (0,1,0)^t$ och $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. Vi får då att

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Sammantaget har vi en singulärvärdesuppdelning $A = U\Sigma V^*$ där

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

6. För ett komplext tal $a \in \mathbb{C}$ låt $S(a)$ vara en delmängd till $M_2(\mathbb{C})$ given av

$$S(a) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A^* = aA\}.$$

(a) **(1p)** Visa att $S(a)$ är icke-tom för alla $a \in \mathbb{C}$.

(b) **(2p)** För vilka $a \in \mathbb{C}$ gäller att $S(a)$ har oändligt många element?

(c) **(2p)** För vilka $a \in \mathbb{C}$ gäller att $S(a)$ är ett delrum till $M_2(\mathbb{C})$?

Lösning. (a) Vi har att nollmatrisen $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ är ett element i $S(a)$ för alla a, ty $\mathbf{0}^* = \mathbf{0} = a\mathbf{0}$ för alla $a \in \mathbb{C}$.

(b) Om $A \neq \mathbf{0}$ och $A \in S(a)$ så har vi att

$$A = (A^*)^* = (aA)^* = \overline{a}aA = |a|^2 A.$$

Detta innebär att beloppet av a måste vara 1 för $S(a)$ ska kunna innehålla mer än ett element, och då kan vi skriva a på formen $a = e^{i\theta}$, där θ är ett reellt tal.
Låt oss undersöka om det finns oändligt många sådana lösningar till ekvationen $A^* = aA$ för ett sådant a, $a = e^{i\theta}$.
Vi börjar med att sätta

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

och betraktar ekvationen

$$A^* = aA \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \overline{x} & \overline{z} \\ \overline{y} & \overline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay \\ az & aw \end{pmatrix}.$$

Speciellt behöver ekvationen $\overline{x} = ax$ vara uppfylld. Låt oss undersöka om det finns lösningar där $x \neq 0$. Om $x \neq 0$ så kan den skrivas på formen $x = re^{i\eta}$ där r är ett positivt reellt tal och η är ett reellt tal. Vi har att $\overline{x} = re^{-i\eta}$ så ekvationen $\overline{x} = ax$ översätts till

$$re^{-i\eta} = e^{i\theta}re^{i\eta} = re^{i(\eta+\theta)}$$

Vi ser att $\eta = -\frac{\theta}{2}$ ger en lösning. Detta innebär att den oändliga mängden

$$\left\{ \begin{pmatrix} re^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; r \in (0, \infty) \right\}$$

är en delmängd till $S(e^{i\theta})$, vilket ger att $S(e^{i\theta})$ har oändligt många element.
Sammantaget har vi att $S(a)$ har oändligt många element om $|a| = 1$ och endast ett element (nämligen $\mathbf{0}$-elementet) om $|a| \neq 0$.

(c) Om $|a| \neq 1$ så har vi att $S(a) = \{\mathbf{0}\}$ vilket självklart är ett delrum. Om $|a| = 1$ så har vi att $S(a)$ inte är slutet under multiplikation med skalärer: Om $A \neq 0$ och $A \in S(a)$, låt då $B = iA$. Vi har då att

$$B^* = (iA)^* = -iA^* = -iaA = -aB \neq aB$$

vilket innebär att $B = iA \notin S(a)$. Från detta drar vi slutsatsen att $S(a)$ inte är ett delrum till $M_2(\mathbb{C})$. $\square$

Rättningen av tentan kommer att vara färdig ungefär 2 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan tentan hämtas ut från studentexpeditionen under öppettiderna: tisdagar 11:45-12:45.