MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Rikard Bøgvad
Kursansvarig: Magnus Carlson

Tentamensskrivning i
Algebra och kombinatorik
7.5 hp
12 januari 2024

Lösningsförslag

1. (5p) Svara på följande frågor

   (a) Låt $G = \mathbb{Z}_{45}$. Vilka ordningar är möjliga för en delgrupp av G?

   (b) Finn alla lösningar till ekvationen $y^2 = x^3 + x + 1$ i $\mathbb{Z}_3$.

   (c) Finns det en graf med valenslistan $(1, 2, 2, 3, 3, 4, 4)$? Om en sådan graf finns, rita en sådan. Om inte, bevisa att ingen sådan graf kan existera.

   (d) Ge exempel på två permutationer $\gamma, \tau \in S_5$ som ej kommuterar, och skriv ner produkterna $\gamma\tau$ och $\tau\gamma$ på cykelform.

   (e) Beräkna Stirlingtalet $S(5, 3)$.

   Lösning: För den första uppgiften så ser vi att $45 = 3^2 \cdot 5$, så vi ser att ordningen av möjliga delgrupper är $1, 3, 5, 9, 15$ och 45, av Lagranges sats (man ser lätt att man kan konstruera en delgrupp för varje påstådd ordning). För att finna alla lösningar till $y^2 = x^3 + x + 1$ så låter vi först $x = 0$ och ser då att y kan vara 1 eller 2. Om $x = 1$ så ser vi att $y = 0$ är den lösningen som finns. Slutligen, om $x = 2$, så söker vi lösningar till $y^2 = 2$, och man ser snabbt att det inte finns sådana y. För nästa deluppgift, så ser vi att summan av valenserna är 19, så av handskakningslemmat kan inte en sådan graft existera (summan av valenserna måste vara jämna, av handskakningslemmat). Om vi för nåsta deluppgift låter $\gamma = (12)$ och $\tau = (23)$ så ser vi att $\gamma\tau = (12)(23) = (231)$ men $\tau\gamma = (23)(12) = (132)$. För att beräkna $S(5, 3)$ så använder vi rekursionsformeln $S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n - -1, -k - 1)$. VI ser att $S(5, 3) = 3S(4, 3) + S(4, 2)$. Nu, $S(4, 3) = 3 \cdot S(3, 3) + S(3, 2)$ och $S(3, 2) = 2S(2, 2) + S(2, 1) = 3$. Så vi ser att $S(4, 3) = 6$. På samma vis ser vi att $S(4, 2) = 7$, så att $S(5, 3) = 25$.

2. Låt G vara mängden av matriser på formen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ med $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$.

   (a) Visa att G är en grupp under matrismultiplikation. 3p

   (b) Avgör huruvida det finns ett element i G av ordning 7. Om det finns ett sådant element, skriv ner det. Om det inte finns ett sådant element, bevisa att det inte existerar. 2p

   Lösning: Vi ser enkelt att produkten av två matriser på den givna formen fortfarande är på given form. Identitetselementet ligger klart i G (och är identitetsmatrisen). Associativitetskravet följer av att matrismultiplikation är associativ. Vidare ser vi att inversen till $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ är

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac - b & -c & 1 \end{pmatrix},$$

   så det är en grupp. Vi ser också lätt att det inte finns några element av ordning 7, eftersom att gruppen har ordning $5^3 = 125$, så Lagrange ger att inget sådant element kan existera.

3. Hur många ord med 18 bokstäver kan man bilda från bokstäverna

$$A, B, C, D, D, F, F, G, M, L, O, O, R, R, R, R, S, S$$

så att ordet inte innehåller någon av delorden SOL, ROS, eller GRO?
Lösning: Vi kommer att använda principen om inklusion-exklusion. Vi ser att det finns totalt 18 bokstäver, och $\binom{18}{2,2,2,2,4}$ möjliga ord utan restriktioner. Om vi betraktar SOL som "en" bokstav, så vill vi kolla hur många ord vi kan bilda med hjälp av "bokstäverna"

$$A, B, C, D, D, F, F, G, M, SOL, O, R, R, R, R, S.$$

Det finns totalt 16 bokstäver, så vi får $\binom{16}{2,2,4}$ sådana ord. Om vi gör samma sak med delorden som innehåller ROS så vill vi vid en första anblick kontrollera hur många ord som vi kan bilda av bokstäverna

$$A, B, C, D, D, F, F, G, M, L, O, ROS, R, R, R, S.$$

Det finns totalt

$$\binom{16}{2,2,3}$$

sådana ord. Här får vi dock ta i beaktande att vi dubbelräknar: vi kommer i detta dubbelräkna när två ROS förekommer i ordet. Antalet ord som innehåller två ROS är antalet ord vi kan bilda av bokstäverna

$$A, B, C, D, D, F, F, G, M, L, ROS, ROS, R, R.$$

Det finns 14 bokstäver och totalt $\binom{14}{2,2,2,2}$ ord. Så det finns

$$\binom{16}{2,2,3} - \binom{14}{2,2,2,2}$$

sådana ord som innehåller ROS. Slutligen, för GRO vill vi kolla antalet ord vi kan bilda mha. bokstäverna

$$A, B, C, D, D, F, F, GRO, M, L, O, R, R, R, S, S.$$

Det finns

$$\binom{16}{2,2,3,2}$$

sådana ord. För att se mängden ord som innehåller SOL och ROS samtidigt så finns det två fall. Det ena är orden som innehåller ROSOL, de andra som ej innehåller ROSOL. Antalet ord som innehåller ROSOL är samma som antalet ord vi kan bilda mha. bokstäverna

$$A, B, C, D, D, F, F, G, M, ROSOL, R, R, R, S.$$

Det finns 14 sådana bokstäver och totalt $\binom{14}{2,2,3}$ sådana ord. För det övriga fallet så betraktar vi bokstäverna

$$A, B, C, D, D, F, F, G, M, R, R, R, SOL, ROS.$$

Det finns 14 stycken sådana bokstäver och vi får

$$\binom{14}{2,2,3}$$

möjliga ord. Med SOL och GRO så kollar vi omordningar av

$$A, B, C, D, D, F, F, GRO, M, R, R, R, S, SOL.$$

Det finns 14 bokstäver och

$$\binom{14}{2,2,3}$$

möjliga ord. Slutligen, för ord som innehåller både ROS och GRO finns två fall. Första fallet är de som innehåller GROS, de andra de som ej innehåller det. För det första fallet kollar vi på omordningar av bokstäverna

$$A, B, C, D, D, F, F, M, L, GROS, O, R, R, R, S.$$

Det finns då $\binom{15}{2,2,3}$ sådana ord. För ord som skapas av bokstäverna

$$A, B, C, D, D, F, F, GRO, M, L, ROS, R, R, S$$

och det finns

$$\binom{14}{2,2,2}$$

sådana ord. Slutligen, så ska vi se de ord som innehåller både SOL, ROS och GRO. Vi får återigen två fall: i det första fallet så förekommer ordet GROSOL, i det andra så förekommer det inte, och i det fallet så förekommer både GROS och SOL. I det första fallet så ser vi att vi kollar omordningar av bokstäverna

$$A, B, C, D, D, F, F, GROSOL, M, R, R, R, S$$

och det finns totalt

$$\binom{13}{2,2,3}$$

sådana ord. I det andra fallet så tittar vi på omordningar av

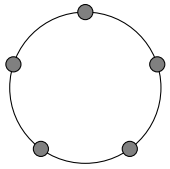
$$A, B, C, D, D, F, F, GRO, M, R, R, R, SOL, S$$

och det finns totalt $\binom{14}{2,2,3}$ sådana ord. Av principen om inklusion så får vi att det finns:

$$\begin{aligned}
&\binom{18}{2,2,2,2,4} - \left[\binom{16}{2,2,3} - \binom{14}{2,2,2,2}\right] - \binom{16}{2,2,4} - \binom{16}{2,2,3,2} \\
&+ \left[\binom{14}{2,2,3} + \binom{14}{2,2,3}\right] + \binom{14}{2,2,3} + \left[\binom{14}{2,2,2,} + \binom{15}{2,2,3}\right] \\
&- \left[\binom{13}{2,2,3} + \binom{14}{2,2,3}\right]
\end{aligned}$$

möjliga ord.

4. Betrakta följande figur, som visar ett halsband med fem kulor:



Låt nu X vara mängden av färgläggningar av varje kula i halsbandet med en av 10 färger, så att ingen färg förekommer på mer än tre kulor. Så med andra ord får en, två eller tre kulor ha samma färg, men inte fler.

(a) Vad är kardinaliteten av X? 1p

(b) Femhörningens symmetrigrupp, som består av 10 element, verkar på X. Bestäm antalet element i fixpunktsmängderna för varje element i gruppen. 3p

(c) Bestäm antalet banor, dvs, antalet ekvivalensklasser av färgläggningar av kulorna i halsbandet ovan, där två färgläggningar anses ekvivalenta om de går att överföra i varandra genom ett element av femhörningens symmetrigrupp.

Lösning: Det finns totalt 10^5 färgläggningar, och för att betrakta de färgläggningar där inga färg förekommer fler än tre gånger så subtraherar vi med de sätt där en färg förekommer fler än tre gånger. En färg kan förekomma fyra gånger, som kan ske på $\binom{5}{4} \cdot 10 \cdot 9$ sätt och en färg kan förekomma fem gånger på 10 sätt för totalt $\binom{5}{4} \cdot 10 \cdot 9 + 10$ sätt.. Så det finns totalt $10^5 - (\binom{5}{4} \cdot 10 \cdot 9 + 10) = 99540$ sätt där ingen färg förekommer fler än tre gånger. Vi skall nu beräkna fixpunkterna för varje element av femhörningens symmetrigrupp. Det finns fem rotationer och fem speglingar. Om vi tänker oss att färg F_1 är på kulan högst upp, F_2 den som kommer näst medsols, så kan vi representera en färgläggning med sekvensen $(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$. En rotation 72 grader tar denna på $(F_5, F_1, F_2, F_3, F_4)$. Vi ser att för att denna skall vara samma som den tidigare så måste $F_1 = F_5 = F_4 = F_3 = F_2$, dvs. alla färger måste vara samma. Men en sådan tillåter vi ej, då högst tre stycken får ha samma färg. En rotation 144 grader tar $(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$ på $(F_4, F_5, F_1, F_2, F_3)$. Då måste $F_1 = F_4, F_2 = F_5, F_3 = F_1, F_4 = F_2$, dvs. $F_1 = F_4 = F_2 = F_5 = F_3$,så inga element fixeras. För rotation 216 grader så tas $(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$ på $(F_3, F_4, F_5, F_1, F_2)$. Isådanafall måste $F_1 = F_3, F_2 = F_4, F_3 = F_5, F_4 = F_1, F_5 = F_2$, dvs. alla måste ha samma färg. Således får vi att inga sådana finns. Med rotation 288 grader så finns det ej några fixelement. Vi behöver nu kontrollera speglingarna. Speglingen från en femhörnings "översta"hörn, tar färgningen $(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$ på $(F_1, F_5, F_4, F_3, F_2)$ så då måste $F_2 = F_5, F_3 = F_4$. Det finns nu $10 \cdot 10 \cdot 9$ färgläggningar som uppfyller kraven. De andra fem speglingarna fungerar helt analogt. Vi applicerar slutligen Burnsides lemma och får att det finns $\dfrac{99540 + 5 \cdot 10^2 \cdot 9}{10} = 10404$ olika färgläggningar som satisfierar kraven.

5. Låt C vara den linjära kod som bestäms av checkmatrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Hitta alla ord i C. 1p

   b) Hur många fel rättar C som mest? Kom ihåg att det är viktigt att visa att C rättar exakt det antal fel du påstår. 2p

   c) Antag att meddelandet $\mathbf{z} = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1)$ har mottagits och det kan ha förekommit högst två fel. Kan vi rätta $\mathbf{z}$? 2p

   Lösning: Genom att radreducera så kan vi hitta nollrummet och se att det har dimension 3, samt utgörs av alla element på formen $(y, x + z, y + z, x, x, y, z)$med x, y, z i $\mathbb{Z}_2$. Således har C kodorden

$$(0,0,0,0,0,0,0), (0,1,1,0,0,0,1), (1,0,1,0,0,1,0), (1,1,0,0,0,1,1)$$

   och

$$(0,1,0,1,1,0,0), (0,0,1,1,1,0,1), (1,1,1,1,1,1,0), (1,0,0,1,1,1,1).$$

   Då vi har en linjär kod så kan vi bara beräkna vikten av koden, och vi ser att vikten är 3. Således rättar C åtminstone ett fel och man kan lätt se att inga fler fel kan rättas (exempelvis om vi mottar $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ så kan vi inte veta huruvida det tänkta meddelandet var $(0, 1, 1, 0, 0, 0, 1)$ eller $(0, 1, 0, 1, 1, 0, 0)$. Om vi nu skall rätta z så ser vi att det finns ett unikt element på Hammingavstånd ≤ 2, nämligen $(0, 1, 1, 0, 0, 1)$, så detta meddelande går att rätta.

6. Betrakta polynomet $p(x) = x^5 + x^4 + x^2 + 2$ i $\mathbb{Z}_3[x]$. Faktorisera $p(x)$ i irreducibla faktorer. *Lösning:* Vi kollar först om polynomet har en rot i $\mathbb{Z}_3$, och vi ser att om vi låter $x = -1 = 2$ så får vi att -1 är en rot. Om vi utför polynomdivision med $x + 1$ så får vi polynomet $x^4 + x + 2$. Vi ser efter kontroll att det ej har rötter, så om det är reducibelt så är det en produkt av två andragradspolynom. Om vi antar att $x^4 + x + 2$ är en produkt av två andragradspolynom så ser vi att $x^4 + x + 2 = (x^2 + bx + c)(x^2 + dx + e)$ för några $b, c, d, e \in \mathbb{Z}_3$. Det vill säga, vi skulle då ha

$$x^4 + x + 2 = x^4 + (d + b)x^3 + (e + c + bd)x^2 + (be + cd)x + ce.$$

Detta ger upphov till ett ekvationssystem som saknar lösningar. Vi ser först att $d = -b = 2b$. Vidare, så skall $ce = 2$, så antingen är $c = 1, e = 2$, eller $c = 2, e = 1$. Vi ser då att $bd = 0$, dvs. $b = d = 0$. Men detta ger en motsägelse, ty $be + cd = 1$ har ingen lösning om b och d är noll.