

**Inga hjälpmedel tillåtna. 15 poäng, inklusive bonus från höstens omgång, ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant.**

1. (5p) Svara på följande frågor

- (a) Låt  $G = \mathbb{Z}_{45}$ . Vilka ordningar är möjliga för en delgrupp av  $G$ ?
- (b) Finn alla lösningar till ekvationen  $y^2 = x^3 + x + 1$  i  $\mathbb{Z}_3$ .
- (c) Finns det en graf med valenslistan  $(1, 2, 2, 3, 3, 4, 4)$ ? Om en sådan graf finns, rita en sådan. Om inte, bevisa att ingen sådan graf kan existera.
- (d) Ge exempel på två permutationer  $\gamma, \tau \in S_5$  som ej kommuterar, och skriv ner produkterna  $\gamma\tau$  och  $\tau\gamma$  på cykelform.
- (e) Beräkna Stirlingtalet  $S(5, 3)$ .

2. Låt  $G$  vara mängden av matriser på formen  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$  med  $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$ .

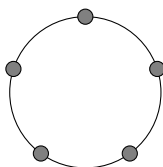
- (a) Visa att  $G$  är en grupp under matrismultiplikation. 3p
- (b) Avgör huruvida det finns ett element i  $G$  av ordning 7. Om det finns ett sådant element, skriv ner det. Om det inte finns ett sådant element, bevisa att det inte existerar. 2p

3. Hur många ord med 18 bokstäver kan man bilda från bokstäverna

$$A, B, C, D, D, F, F, G, M, L, O, O, R, R, R, R, S, S$$

så att ordet inte innehåller någon av delorden SOL, ROS, eller GRO? (**Dina svar för denna uppgift får innehålla kombinatorisk standardnotation från kursen, som ej behöver beräknas eller förenklas, men måste motiveras tydligt.**)

4. Betrakta följande figur, som visar ett halsband med fem kulor:



Låt nu  $X$  vara mängden av färgläggningar av varje kula i halsbandet med en av 10 färger, så att ingen färg förekommer på mer än tre kulor. Så med andra ord får en, två eller tre kulor ha samma färg, men inte fler.

- (a) Vad är kardinaliteten av  $X$ ? 1p

- (b) Femhörningens symmetrigrupp, som består av 10 element, verkar på  $X$ . Bestäm antalet element i fixpunktmängderna för varje element i gruppen. 3p
- (c) Bestäm antalet banor, dvs, antalet ekvivalensklasser av färgläggningar av kulorna i halsbandet ovan, där två färgläggningar anses ekvivalenta om de går att överföra i varandra genom ett element av femhörningens symmetrigrupp. (**Dina svar för denna uppgift får innehålla kombinatorisk standardnotation från kursen, som ej behöver beräknas eller förenklas, men måste motiveras tydligt.** )

5. Låt  $C$  vara den linjära kod som bestäms av checkmatrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Hitta alla ord i  $C$ . 1p
- b) Hur många fel rättar  $C$  som mest? Kom ihåg att det är viktigt att visa att  $C$  rättar exakt det antal fel du påstår. 2p
- c) Antag att meddelandet  $\mathbf{z} = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1)$  har mottagits och det kan ha förekommit högst två fel. Kan vi rätta  $\mathbf{z}$ ? 2p
6. Betrakta polynomet  $p(x) = x^5 + x^4 + x^2 + 2$  i  $\mathbb{Z}_3[x]$ . Faktorisera  $p(x)$  i irreducibla faktorer. 5p

**Lycka till!**