MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
24 april 2024

Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas. Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Max antal poäng på tentan är 30, och 15 skrivningspoäng ger betyg åtminstone E.

Påminnelse.

- Om inget annat anges så används standard inre produkterna på vektorrummen $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{C}^n$.
- $\mathrm{P}_n(\mathbb{F})$ står för $\mathbb{F}$-vektorrummet av polynom av grad högst n med koefficienter i kroppen $\mathbb{F}$.
- $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ står för $\mathbb{F}$-vektorrummet av $m \times n$-matriser med element i kroppen $\mathbb{F}$.

Uppgifter.

1. (a) Låt $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ vara en delmängd av ett vektorrum V över en kropp $\mathbb{F}$. Ange definitionen av $\mathrm{span}(S)$ samt definitionen av att S *spänner upp* V. (1p)

   (b) Ange en mängd $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathrm{P}_3(\mathbb{R})$ sådan att S spänner upp $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$ och ingen v_i har grad 2. Visa att ditt svar stämmer enligt definitionen av 'spänner upp'. (2p)

   (c) Låt v_1, v_2, v_3, v_4 vara fyra vektorer som spänner upp ett vektorrum V över $\mathbb{R}$. Visa att de fyra vektorerna $v_1 - v_2,\ v_2 - v_3,\ v_3 - v_4,\ v_4$ också spänner upp V. (2p)

2. (a) Låt V och W vara vektorrum över en kropp $\mathbb{F}$. Ange definitionen av att en funktion $T : V \to W$ är *linjär*. (1p)

   (b) Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära operatorn som ges av (4p)

   $$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2,\ 2x_2,\ -x_2 + 3x_3).$$

   Bestäm en ordnad bas B för $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer för T, och beräkna avbildningsmatrisen $[T]_B^B$ samt basbytesmatrisen $[\mathrm{id}]_E^B$, där $E = (e_1, e_2, e_3)$ är standardbasen för $\mathbb{R}^3$.

3. Bestäm en ON-bas för det delrum V av $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, samt skriv vektorn (5p)

   $$v = (2, 3, 1, 2)$$

   som en linjärkombination av dessa basvektorer.

Var god vänd!

4. (a) Ange definitionen av den *adjungerade avbildningen* T^* till en linjär operator $T : V \to V$ på ett inreproduktrum V. (1p)

   (b) Låt $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ ges av $T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, z_1, z_2, z_3)$. Bestäm en formel för $T^*(z_1, z_2, z_3, z_4)$. (2p)

   (c) Låt (2p)

$$A = \begin{pmatrix} 2i & -3 \\ 3 & 2i \end{pmatrix}.$$

   Avgör om finns det on ON-bas för $\mathbb{C}^2$ bestående av egenvektorer för A. (Kom ihåg att motivera tydligt.)

5. (a) Låt $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ange definitionen av $\mathrm{rang}(A)$. (1p)

   (b) Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen (4p)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$

6. (a) Låt $\mathbb{F}$ vara en kropp, $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ en matris och λ ett egenvärde till A. Ange definitionerna av den *algebraiska* respektive *geometriska* multipliciteten av λ. (2p)

   (b) Låt $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Visa att $\lambda \in \mathbb{C}$ är ett egenvärde till A om och endast om λ är en rot till det karaktäristiska polynomet för A. (3p)

Rättningen av tentan kommer att vara färdig ungefär 2 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan en kopia av tentan beställas från studentexpeditionen:

`https://www.math.su.se/tentaåterlämning`