MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avdelning Matematik
Examinator: Pavel Kurasov

Lösningar till tentan
Matematik för Naturvetare 1,
6 hp
5 december 2023

1 Man bryter ut x^2 från nämnaren och täljaren

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+\sqrt{x^3+2}}{x^2-x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\sqrt{1/x+2/x^4}}{1-1/x+1/x^2} = \frac{2+0}{1+0+0} = 2.$$

Vi använder produktregeln:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin x} = 3\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 3.$$

2 Vi beräknar determinanten;

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 2a & -2 \end{pmatrix} = -a^2+2a = -a(a-2).$$

För alla $a \neq 0, 2$ har systemet en lösning.

För $a=0$ får vi:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ x & = & 2 \\ x-2z & = & 0 \end{array} \right.$$

Systemet saknar lösningar.

För $a=2$ blir det:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+2y & = & 1 \\ x+2z & = & 2 \\ x+4y-2z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y & = & 1 \\ -2y+2z & = & 1 \\ 2y-2z & = & -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y & = & 1 \\ -2y+2z & = & 1 \end{array} \right.$$

Lösningen är

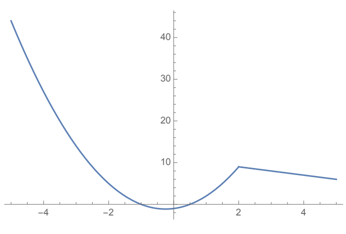
$$(x,y,z) = (0,1/2,1) + s(2,-1,-1),\ s \in \mathbb{R}.$$

Systemet har oändligt många lösningar i detta fall.

3 Vi börjar med att ritta grafer till funktionerna:

$$g_1(x) = 2x^2+x-1, \quad g_2(x) = -x+11.$$

Den första funktionen är lika med 0 då $x = 1, -2$ och har minimum i punkten $g_1'(x) = 4x+1 = 0 \Rightarrow x = -1/4$. Parabeln är vänd uppåt.



Grafen till funktionen g_2 är en rätt linje.

Parabeln och linjen möts i punkten $(x, y) = (2, 9)$, dvs funktionen är kontinuerlig.

Punkterna $x = -1/4$ och $x = 2$ är lokala extrempunkter (minimipunkt och maximipunkt). Värdemängen är hela $\mathbb{R}$.

4 a) Vi sätter in $z = a + ib$ som ger

$$-2(a+ib) + 3i(a-ib) = 5i \Rightarrow \begin{cases} -2a + 3b &= 0 \\ 3a - 2b &= 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = 2.$$

Lösningen blir$z = 3 + 2i$.

b) Vi använder pq-formeln:

$$z_{1,2} = \frac{-5+2i \pm \sqrt{(5-2i)^2 - 20(1-i)}}{2} = \frac{-5+2i \pm \sqrt{25 - 20i - 4 - 20 + 20i}}{2} = \frac{-5+2i \pm 1}{2}.$$

De två lösningarna är $z_1 = -2 + i$ och $z_2 = -3 + i$.

5 a)

$$\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AB} + \vec{BC} \ + \vec{AB} + \vec{BD} = 3\vec{AB} + \vec{BC} \ + \vec{BD}$$

b) Beräkningarna gäller oavsett om vertorerna ligger i ett plan eller i rummet.

6 Först ska vi leta efter lösningen till den homogena ekvationen:

$$y'' - 9y' + 18y = 0.$$

Substitutionen $y = e^{rx}$ ger

$$r^2 - 9r + 18 = 0 \Rightarrow r = 6, 3.$$

Lösningen till den homogena ekvationen är:

$$y_{\text{hom}} = Ae^{6x} + Be^{3x}.$$

Vi letar efter den partikulära lösningen på formen $y_{\text{part}} = C \sin x + D \cos x$ Substitutionen i ekvationen ger:

$$-C \sin x - D \cos x - 9(C \cos x - D \sin x) + 18(C \sin x + D \cos x) = 9 \sin x + 17 \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -C + 9D + 8C &= 9 \\ -D - 9C + 18D &= 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7C + 9D &= 9 \\ -9C + 17D &= 17 \end{cases} \Rightarrow C = 0, D = 1.$$

Den allmänna lösningen till ekvationen blir:

$$y = y_{\text{part}} + y_{\text{hom}} = Ae^{6x} + Be^{3x} + \cos x.$$

För att hitta lösningen som uppfyller begynnelsevillkor beräknar vi derivatorna:

$$\begin{cases} y(0) &= A + B + 1 &= 1 \\ y'(0) &= 6A + 3B &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B &= 0 \\ 6A + 3B &= 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0.$$

Lösningen till l diff. ekvationen blir

$$y = \cos x.$$