MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Yishao Zhou

Tentamensskrivning i
matematik II -Analys B
Den 23 maj 2024

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 4 från teorifrågorna, krävs för godkänt.

---

1. Beräkna $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ längs den positivt orienterade cirkeln $x^2+y^2=1$. (5p)

2. Antag att funktionen g är kontinuerlig i $\mathbb{R}^3$ och uppfyller $0 < m \le g(x,y,z) \le M$, m, M är konstanter. För vilka reella p konvergerar följande integraler?
   (a) $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p}$; (2p)
   (b) $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} \frac{g(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; (2p)
   (c) $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2> 1} \frac{g(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. (1p)

3. Antag att $\mathbf{F} = (r - r^3)\mathbf{r}$ där $\mathbf{r} = (x,y,z)$ och $r = |\mathbf{r}|$. Låt S vara en sluten yta med utåtriktad enhetsnormal normal $\mathbf{N}$.
   (a) Skriv ytintegralen $I = \displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot N\,dS$ som en trippelintegral. (4p)
   (b) För vilken yta S blir värdet på integralen I störst? (1p)

4. (a) (**Teoriuppgift**) Låt $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$ vara ett tredimensionellt fält. Hur definieras rot $\mathbf{F}$, div$\mathbf{F}$? (1p)
   (b) Givet $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3 - y^3, 3yz, y^3 + z^3)$. Vilka av följande uttryck är väldefinierade? Beräkna dem som är väldefinierade.
   (i) grad rot div $\mathbf{F}$; (ii) rot rot rot $\mathbf{F}$; (iii) div grad rot $\mathbf{F}$. (4p)

5. Antag att $\mathbf{F} = (P, Q)$ är ett fält.
   (a) (**Teoriuppgift**) När kan vi dra slutsats direkt att fältet $\mathbf{F}$ inte är konservativt? (1p)
   (b) (**Teoriuppgift**) Är villkoret $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ tillräckligt för existens av en potentialfunktion? Bevisa om svaret är ja. Ange annars ett exempel. (2p)
   (c) (**Teoriuppgift**) Vad är motsvarigheten till villkoret $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ för att integration ska vara oberoende av vägen för komplexa kurvintegraler i enkelt sammanhängande områden (2p)

6. Låt $z \in \mathbb{C}$.
   (a) (**Teoriuppgift**) Beskriv hur konvergensradien till serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ kan bestämmas. (1p)
   (b) (**Teoriuppgift**) Definiera likformig konvergens av serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. (1p)
   (c) Diskutera konvergensradier för serierna $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ och $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. (1p)
   (d) (**Teoriuppgift**) Resonera huruvida likheten $\displaystyle\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}\frac{z^n}{n!}$ är sann eller falsk. (2p)

Fylla i det här formuläret: `https://survey.su.se/Survey/51990`. *När din tenta är redo för utlämning kommer du att få ett mejl från tentaaterlamning@math.su.se. Om du inte fått mejlet så är din tenta inte redo för utlämning.*