Lösningsförslag Matematik II Analys del B 20240523

(1) Beräkna $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ längs den positivt orienterade cirkeln $x^2+y^2=1$.

Lösning: Här är polärkoordinater enklaste. Kurvan är $\mathbf{r} = (\cos t, \sin t)$ med t från 0 till 2π som har tangenten $\mathbf{r}' = (-\sin t, \cos t)$. Då $\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}' = 1$. Så kurvintegralen blir

$$\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} 1\ \mathrm{d}t = 2\pi.$$

(2) Antag att funktionen g är kontinuerlig i $\mathbb{R}^3$ och uppfyller $0 < m \le g(x,y,z) \le M$, m, M är konstanter. För vilka reella p konvergerar följande integraler?

(a) $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p}$.

(b) $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} \frac{g(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

(c) $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{g(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Lösning: Notera att (b) följer direkt från (a) eftersom $|g|$ är begränsad uppåt med M och nedåt begränsad med m. Med hjälp av rymdpolär kordinater får vi

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p} = \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}}\right) = 4\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}}.$$

Den sista integralen konvergerar då $p < 3/2$ och divergerar då $p \ge 3/2$. Så integralerna i (a) och (b) konvergerar då $p < 3/2$ och divergerar då $p \ge 3/2$.

På samma sätt behöver vi bara undersöka konvergens av $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\ge 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p}$ i (c).

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\ge 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p} = \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}}\right) = 4\pi\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}}$$

vilket konvergerar då $p > 3/2$ och divergerar då $p \le 3/2$. Så integralen i (c) konvergerar då $p > 3/2$ och divergerar då $p \le 3/2$.

(3) Antag att $\mathbf{F} = (r - r^3)\mathbf{r}$ där $\mathbf{r} = (x,y,z)$ och $r = |\mathbf{r}|$. Låt S vara en sluten yta med utåtriktad enhetsnormal normal $\mathbf{N}$.

(a) Skriv ytintegralen $I = \displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot N\, dS$ som en trippelintegral.

(b) För vilken yta S blir värdet på integralen I störst?

Lösning: Notera att

$$\mathbf{F} = r(1-r^2)\mathbf{r} = (xr(1-r^2), yr(1-r^2), zr(1-r^2))$$

och att

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}xr(1-r^2) &= (r+\frac{x^2}{r})(1-r^2) - 2rx^2,\\
\frac{\partial}{\partial x}yr(1-r^2) &= (r+\frac{y^2}{r})(1-r^2) - 2ry^2,\\
\frac{\partial}{\partial x}zr(1-r^2) &= (r+\frac{z^2}{r})(1-r^2) - 2rz^2
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\mathbf{F}\\
=&(r+\frac{x^2}{r})(1-r^2) - 2rx^2 + (r+\frac{y^2}{r})(1-r^2) - 2ry^2 + (r+\frac{z^2}{r})(1-r^2) - 2rz^2\\
=&4r - 6r^3 = 2r(2-3r^2)
\end{aligned}$$

Det är nu lätt att inse att alla villkor i Gauss sats är uppfyllda och den ger

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot N \, dS = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_K 2r(2 - 3r^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

där K är den kropp vars yta är S.
Integranden i trippelintegralen är positiv precis då $2 - 3r^2 \geq 0$, dvs $r \leq \sqrt{2/3}$. Trippelintegralen är maximal då den innehåller precis det område där integranden är positiv. Således är trippelintegralen maximal på klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2/3$. Så ytintegralen är maximal på den sfäriska ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 2/3$.

(4) (a) (**Teoriuppgift**) Låt $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$ vara ett tredimensionellt fält. Hur definieras rot $\mathbf{F}$, div$\mathbf{F}$?
(b) Givet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 - y^3, 3yz, y^3 + z^3)$. Vilka av följande uttryck är väldefinierade? Beräkna dem som är väldefinierade.
(i) grad rot div $\mathbf{F}$; (ii) rot rot rot $\mathbf{F}$; (iii) div grad rot $\mathbf{F}$.

Lösning: Se s. 367 respektive s 377 i kursboken för svaret till (a).
(b) (i) och (iii) är inte väldefinierade ty rot resulterar ett vektorfält men grad opererar på ett skalärfält.
(ii) rot rot rot $\mathbf{F}$ är väldefinerad.

$$\nabla \times (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})) = \nabla \times (\nabla \times (3y^2 - 3y, 0, 3y^2)) = \nabla \times (6y, 0, -6y + 3) = (-6, 0, -6).$$

(5) Antag att $\mathbf{F} = (P, Q)$ är ett fält.
(a) (**Teoriuppgift**) När kan vi dra slutsats direkt att fältet $\mathbf{F}$ inte är konservativt?
(b) (**Teoriuppgift**) Är villkoret $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ tillräckligt för existens av en potentialfunktion? Bevisa om svaret är ja. Ange annars ett exempel.
(c) (**Teoriuppgift**) Vad är motsvarigheten till villkoret $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ för att integration ska vara oberoende av vägen för komplexa kurvintegraler i enkelt sammanhängande områden

Lösning: (a) om $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$.
(b) Nej, t ex uppgift 1 eller smagnetfältet, se exempel 14 på s 352, kursboken.
(c) Cauchy-Riemanns ekvationer, se s 2. kompendiet.

(6) Låt $z \in \mathbb{C}$.
(a) (**Teoriuppgift**) Beskriv hur konvergensradien till serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ kan bestämmas.
(b) (**Teoriuppgift**) Definiera likformig konvergens av serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.
(c) Diskutera konvergensradier för serierna $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.
(d) (**Teoriuppgift**) Resonera huruvida likheten $\frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \frac{z^n}{n!}$ är sann eller falsk.

Lösning: (a) Se Sats 8.1 Definition 8.1 och Följdsats 8.1 i kompediet.
(b) Se Definition 7.1, kompediet.
(c) Se Lemma 8.1, kompendiet.
(d) Likheten är korrekt, enligt Sats 9.1 kompendiet.