Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Matematiska metoder för naturvetare, MM2004, den 20 febuari 2023

1. (a) Funktionen f har definitionsmängd $]3,\infty[$, och värdemängd $\mathbb{R}$, så för $x > 3$ får vi

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = 2\ln(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad y/2 = \ln(x-3) \\ &\Leftrightarrow \quad x - 3 = e^{y/2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 + e^{y/2}. \end{aligned}$$

Funktionen f är därmed inverterbar, och $f^{-1}(y) = 3 + e^{y/2}$ för alla $y \in \mathbb{R}$. Svaret är alltså att $f^{-1}(x) = 3 + e^{x/2}$ för $x \in \mathbb{R}$.

(b) Låt $f(x) = 3 - x$ och $g(x) = 2/x$. Skärningspunkterna för graferna $y = f(x)$ och $y = g(x)$ fås av ekvationen $f(x) = g(x)$ som ger

$$\frac{2}{x} = 3-x \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 3x-x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-3x+2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x-2) = 0,$$

dvs $x = 1$ och $x = 2$. På intervallet $[1, 2]$ är $f(x) \geq g(x)$ (eftersom $f(3/2) = 3/2 > 4/3 = g(3/2)$), så den sökta arean är

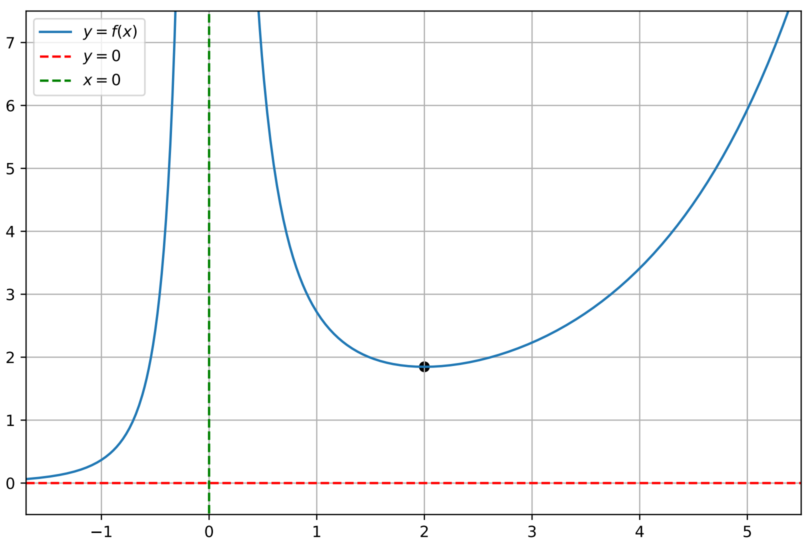
$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 (f(x) - g(x))\, dx = \int_1^2 \left((3-x) - \frac{2}{x}\right) dx = \left[3x - \frac{x^2}{2} - 2\ln(x)\right]_1^2 \\ &= (6 - 2 - 2\ln(2)) - \left(3 - \frac{1}{2} - 2\ln(1)\right) = \frac{3}{2} - 2\ln(2). \end{aligned}$$

2. Den kontinuerliga funktionen $f(x) = e^x/x^2$ är definierad då $x \neq 0$. Det ger en enda möjlig vertikal asymptot, och eftersom vi får $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ så $x = 0$ är en asymptot. Vi får vidare att $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, så horisontell asymptot saknas då $x \to \infty$, men $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ så $y = 0$ är horisontella asymptot då $x \to -\infty$.

Derivering ger $f'(x) = \frac{x^2e^x - e^x 2x}{(x^2)^2} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$, så $f'(x) = 0$ endast för $x = 2$. Vi gör en teckentabell:

x		0		2	
$f'(x)$	$+$	$\wr$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\wr$	$\searrow$	$\frac{e^2}{4}$	$\nearrow$

Från teckentabellen ser vi att funktionen bara har en lokal extrempunkt, ett lokalt minimum för $x = 2$. Globala extremvärden saknas. Vi skissar grafen:



3. (a) Vi får $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, och

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = [\text{utveckla rad } 2] = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(3-(-1)) = 8.$$

(b) Vi får $(A \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} {}^{-1} \\ \\ {}^{+} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot 1/2 \\ \mid \cdot 1/4 \end{array}$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 0 & 1/4 \end{array}\right) \begin{array}{l} {}^{+} \\ \\ {}_{1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 0 & 1/4 \end{array}\right)$

$= (E \mid A^{-1})$, så $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Beräkning ger $AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2X$, så X är en egenvektor med egenvärde 2.

4. (a) Vi börjar med att bestämma en primitiv funktion

$$\int \frac{3x}{1+x^2}\,dx = \left[u = 2+x^2,\ \frac{1}{2}\,du = x\,dx\right] = \frac{3}{2}\int \frac{du}{d} = \frac{3}{2}\ln|u| + C = \frac{3}{2}\ln(1+x^2) + C$$

så $\displaystyle\int_2^\infty \frac{3x}{1+x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{3}{2}\ln(1+x^2)\right]_2^N = \frac{3}{2}\lim_{N\to\infty}\ln\left(\frac{1+N^2}{5}\right) = \infty.$

Vi har därmed visat att den generaliserade integralen är divergent.

(b) Vi börjar med att lösa den homogena ekvationen $y_h'' + y_h - 6y_h = 0$. Den karakteristiska ekvationen är $m^2 + m - 6 = 0$, med lösningar $m = 2$ och $m = -3$, så $y_h = Ae^{2x} + Be^{-3x}$, för $A, B \in \mathbb{R}$.

Vi ansätter en partikulärlösning på formen $y_p = ae^{-2x}$, så $y_p' = -2ae^{-2x}$ och $y_p'' = 4ae^{-2x}$ så vi får $y_p'' + y_p - 6y_p = -4ae^{-2x}$ vilket skall vara lika med e^{-2x}, vilket betyder att $a = -1/4$, så $y_p = -e^{-2x}/4$.

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är därmed

$$y = y_p + y_h = -\frac{1}{4}e^{-2x} + Ae^{2x} + Be^{-3x}.$$

5. (a) Låt X vara det slumpmässiga mätfelet där $X \sim N(\mu = 0, \sigma = 10)$. Sannolikheten att absolutbeloppet av mätfelet blir mindre än 5 är

$$P(|X| < 5) = P(-5 < X < 5) = \Phi\left(\frac{5-0}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-5-0}{10}\right) = \Phi(0.5) - \Phi(-0.5)$$

Tabell 1 ger $\Phi(0.5) = 0.6915$ och $\Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$ och den sökta sannolikheten blir $0.6915 - 0.3085 = 0.383$.

(b) Den uppmätta salthalten för ett prov med verklig salthalt 145 ppm kommer överstiga 160 ppm om det slumpmässiga mätfelet X bli större än $+15$ ppm. Sannolikheten för det är

$$P(X > 15) = 1 - P(X < 15) = 1 - \Phi\left(\frac{15-0}{10}\right) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668.$$

(c) Medelvärdet av 10 oberoende slumpmässiga mätfel, $\bar{X}$ är också normalfördelad, med samma väntevärde $\mu = 0$ men med standardavvikelse $\sigma = 10/\sqrt{10} = \sqrt{10}$. Medelvärdet av de 10 mätningarna kommer avvika mer än ± 5 ppm från det verkliga värdet på salthalten om $\bar{X} < -5$ eller om $\bar{X} > 5$ Sannolikheten för det blir

$$P(\bar{X} < -5) + P(\bar{X} > 5) = 1 - P(\bar{X} < 5) + 1 - P(\bar{X} < 5)$$

$$= 2(1 - P(\bar{X} < 5)) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{5-0}{\sqrt{10}}\right)\right) \approx 2(1 - \Phi(1.58)) = 0.1142.$$

6. Låt p_1 beteckna varulagrets felfrekvens vid den första undersökningen och p_2 felfrekvensen vid undersökningen ett år senare, samt p_1^* och p_2^* motsvarande felfrekvenser i stickproven. En bedömning av om felfrekvensen i varulagret har förändrats mellan de två åren görs med ett hypotestest där vi ställer upp följande hypoteser:

$$H_0 : p_1 = p_2 \Leftrightarrow p_2 - p_1 = 0$$
$$H_1 : p_1 \neq p_2 \Leftrightarrow p_2 - p_1 \neq 0.$$

Om signifikansnivån väljs till 5% kan testet göras med hjälp av ett 95% konfidensintervall för $p_2 - p_1$ vilket beräknas med formeln:

$$p_2^* - p_1^* \pm \lambda_{0.025}\sqrt{\frac{p_1^*(1-p_1^*)}{n_1} + \frac{p_2^*(1-p_2^*)}{n_2}}$$

Med $n_1 = 300$, $p_1^* = 24/300 = 0.08$, $n_2 = 200$, $p_2^* = 22/200 = 0.11$ och $\lambda_{0.025} = 1.96$ får man efter insättning intervallet 0.03 ± 0.053 eller $(-0.023, 0.083)$.

Felfrekvensen i varulagret förefaller ha ökat mellan de två åren men eftersom konfidensintervallet täcker in värdet noll så är förändringen inte statistiskt säkerställd (signifikant) på 5%-nivån.