MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Examinator: Håkan Granath

Tentamensskrivning MM2004
Matematiska metoder för naturvetare
den 24 augusti 2023

Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Betygsgränser:

Max	30 p	B	24 p	D	18 p
A	27 p	C	21 p	E	15 p

Tillåtna hjälpmedel: Utdelade formel- och tabellsamlingar samt utdelad miniräknare.

1. (a) Lös olikheten $\dfrac{x-1}{x-3} \leq 2$. (2p)

   (b) Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av kurvorna $y = \dfrac{2}{1+4x^2}$ och $y = 1$. (3p)

2. Rita grafen (5p)
$$y = \frac{x^2}{x-2}.$$
   Ange speciellt alla asymptoter och lokala extremvärden.

3. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Beräkna determinanten till A. (2p)

   (b) Bestäm inversen till A. (2p)

   (c) Lös matrisekvationen $AX = B$. (1p)

4. (a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen (2p)
$$xy' + y = 1,$$
   för $x > 0$.

   (b) Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} xy' = y^2, \\ y(1) = 1. \end{cases}$ (3p)

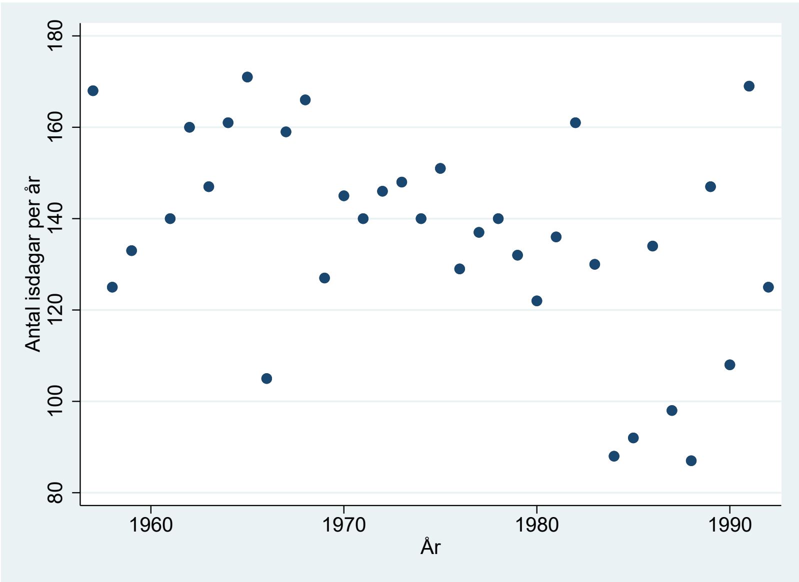
Var god vänd!

5. En elektronisk komponent har en exponentialfördelad livslängd, med väntevärde 1500 timmar.

   (a) Beräkna sannolikheten för att komponenten fungerar i minst 1350 timmar. (2p)

   (b) Om man har sex sådana komponenter som fungerar oberoende av varandra, vad är sannolikheten för att minst två av dem fortfarande fungerar efter 1350 timmar? (3p)

6. Diagrammet nedan visar antal dagar per säsong som Vallentunasjön varit isbelagd under perioden 1957 till 1992 (säsong 1957/58 till säsong 1992/93).



   (a) Bestäm med minsta kvadratmetoden en linjär regressionsmodell som beskriver hur antal isdagar per säsong har förändrats under perioden. (2p)
   Räknehjälp (x = år, y = antal isdagar): $\bar{x} = 1974.9 \quad \bar{y} = 136.2$

   $$\sum_{i=1}^{35}(x_i - \bar{x})^2 = 3668.7 \quad \sum_{i=1}^{35}(y_i - \bar{y})^2 = 17911.6 \quad \sum_{i=1}^{35}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -3509.4$$

   (b) För år 1960 (säsong 1960/61) saknas det uppgift om antal isdagar. Beräkna med hjälp av regressions-modellen väntevärdet av antal isdagar för den säsongen. (1p)

   (c) Beräkna ett 95% konfidensintervall för regressionslinjens lutning och avgör om det har skett en signifikant minskning av antal isdagar per säsong under tidsperioden. (2p)
   Räknehjälp: $\sigma^* = s = 21.001 \quad t_{0.025}(33) = 2.0345$