

Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Betygsgränser:

$$\begin{array}{r|l|l} \text{Max} & 30 \text{ p} & \text{B} & 24 \text{ p} & \text{D} & 18 \text{ p} \\ \text{A} & 27 \text{ p} & \text{C} & 21 \text{ p} & \text{E} & 15 \text{ p} \end{array}$$

Tillåtna hjälpmedel: Utdelade formel- och tabellsamlingar samt utdelad miniräknare.

1. (a) Lös olikheten  $\frac{2}{x+1} \leq \frac{1}{x-1}$ . (3p)

(b) Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av kurvorna  $y = \frac{4}{1+x^2}$  och  $y = 1$ . (2p)

2. Rita grafen  $y = \frac{x+2}{e^x}$ . (5p)

Ange speciellt alla asymptoter och lokala extremvärden.

3. Låt  $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Beräkna  $A^2$ , determinanten av  $A$ , samt inversen  $A^{-1}$ . (5p)

Visa att  $X = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$  är en egenvektor till  $A$  och bestäm dess egenvärde.

4. (a) Avgör om den generaliserade integralen (2p)

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

är konvergent, och ange i så fall dess värde.

(b) Lös, för  $x > 0$ , begynnelsevärdesproblemet  $\begin{cases} xy' - y = 2x^2, \\ y(1) = 1. \end{cases}$  (3p)

5. En vanlig kortlek består av 52 kort varav fyra stycken är ess. Fem kort dras ur en välblandad sådan kortlek. Beräkna sannolikheten att precis två av de fem korten är ess

(a) om korten dras *utan* återläggning, (2p)

(b) om korten dras *med* återläggning. (2p)

(c) Bestäm väntevärdet för antal ess som dras i uppgift (a) respektive (b). (1p)

6. Fyra mätningar av halten PFAS i dricksvatten från en egen brunn gav följande resultat (enhet: mikrogram per liter):

0.97, 0.84, 0.91, 0.75.

Antag att mätningarna kan betraktas som oberoende observationer från en normalfördelning med okänt väntevärde och okänd standardavvikelse.

(a) Bestäm ett 95% konfidensintervall för väntevärdet. Ger konfidensintervallet skäl att tvivla på att väntevärdet är 0.75 ? (2p)

(b) Från samma brunn gjordes en månad senare sex nya mätningar av PFAS-halten i dricksvattnet och ett 95% konfidensintervall för väntevärdet beräknades till  $0.66 \pm 0.12$ . Bedöm med ett hypotestest om det har skett någon förändring av väntevärdet mellan de två mättillfällena. Man kan anta att mätningarna även vid det senare tillfället är normalfördelade och att standardavvikelsen är densamma vid de två tillfällena. (3p)