Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Matematiska metoder för naturvetare, MM2004, den 9 januari 2024

1. (a) Vi skriver om olikheten

$$\frac{2}{x+1} \leq \frac{1}{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-3}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

så vi kan ställa upp en teckentabell

x		-1		1		3	
$x-3$	$---$	$-$	$---$	$-$	$---$	0	$+++$
$x+1$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$
$x-1$	$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$
$\dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)}$	$---$	$\wr$	$+++$	$\wr$	$---$	0	$+++$

Vi ser att $\dfrac{2}{x+1} \leq \dfrac{1}{x-1}$ precis då $x < -1$ eller $1 < x \leq 3$.

(b) Vi börjar med att bestämma skärningspunkterna mellan kurvorna. Ekvationen $\frac{4}{1+x^2} = 1$, ger att $x^2 = 3$, så $x = \pm\sqrt{3}$. På intervallet mellan $x = -\sqrt{3}$ och $x = \sqrt{3}$ är $\frac{4}{1+x^2}$ den övre funktionen, så vi får att den sökta arean är

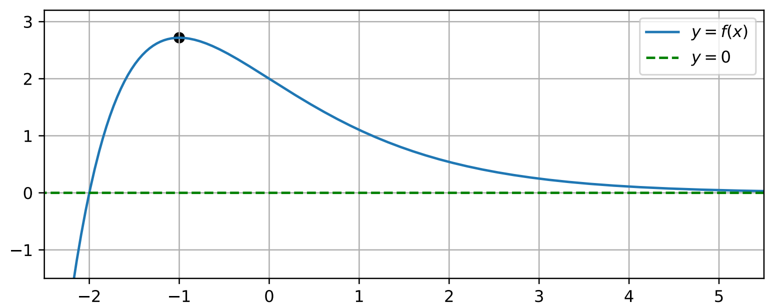
$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{4}{1+x^2} - 1\right) dx = \Big[4\arctan(x) - x\Big]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 8\pi/3 - 2\sqrt{3}.$$

2. Funktionen $f(x) = (x+2)e^{-x}$ är definierad och kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$, därmed kan det inte finnas någon vertikal asymptot. Vi har $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ så vi har ingen asymptot då $x \to -\infty$, men $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ så $y = 0$ är grafens enda asymptot.

Vi får att $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$ så $f'(x) = 0$ bara för $x = -1$. Vi gör en teckentabell

x		-1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	e	$\searrow$

Från denna ser vi att funktionen bara har en har en lokal extrempunkt, ett maximum i $x = -1$. Detta är även de funktionens globala maximum. Vi skissar grafen:



3. Vi får direkt att $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 18 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, och $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [\text{utv. rad 2}] =$

$= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(1-2) = -2$. Inversen bestäms genom:

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot 1/2 \\ \mid \cdot (-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right) = (E \mid A^{-1}).$$

Man får $AX = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} = 2X$, så X är en egenvektor med egenvärde 2.

4. (a) Vi börjar med att bestämma en primitiv funktion

$$\int xe^{-x^2}\,dx = \left[u = -x^2,\ -\frac{1}{2}\,du = x\,dx\right] = -\frac{1}{2}\int e^u\,du = -\frac{1}{2}e^u + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

så $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^N = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-N^2}}{2}\right) = \frac{1}{2}.$

(b) Differentialekvationen är linjär. Om vi skriver om den på formen $y' + g(x)y = h(x)$ for vi

$$y' - \frac{1}{x}y = 2x,$$

så $g(x) = \frac{1}{x}$, och därmed är den integrerande faktorn $e^{G(x)} = e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$, så vi får

$$\left(\frac{1}{x}y\right)' = 2$$

vilket efter integrering ger $\frac{1}{x}y = 2x + C$. Begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ ger nu $1 = 2 + C$, så $C = -1$. Lösningen är därmed $y(x) = 2x^2 - x$.

5. (a) Om fem kort dras utan återläggning är antal ess man får hypergeometrisk fördelad med parametrar $N = 52$, $n = 5$ och $p = 4/52$. Sannolikheten att få precis två ess blir (se formelbladet):

$$\frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0.0399$$

(b) Om fem kort dras med återläggning är antal ess man får binomialfördelad med parametrar $n = 5$ och $p = 4/52$. Sannolikheten att få precis två ess blir (se formelbladet):

$$\binom{5}{2}\left(\frac{4}{52}\right)^2\left(\frac{48}{52}\right)^3 = 0.0465$$

(c) Det gäller att $X \sim Hypergeom(N = 52, n = 5, p = 4/52)$ och $Y \sim Binomial(n = 5, p = 4/52)$. Med hjälp av formelbladet får man:

$$E(X) = E(Y) = 5\frac{4}{52} \approx 0.385$$

6. (a) Ett 95% konfidensintervall för väntevärdet μ beräknas med formeln (se formelbladet):

$$\bar{x} \pm t_{0.025}(n-1)s/\sqrt{n}$$

Med $n = 4$ mätningar beräknas medelvärde och standardavvikelse till $\bar{x} = 0.8675$ respektive $s = 0.0946$. Ur tabell 5 bestäms t-kvantilen till $t_{0.025}(3) = 3.182$ och med insatta värden blir konfidensintervallet efter avrundning:

$$0.87 \pm 0.15 \quad \text{eller} \quad (0.72, 1.02)$$

Konfidensintervallet motsäger inte att väntevärdet är 0.75 eftersom det värdet finns med i intervallet (det är dock ganska nära den nedre gränsen så en viss grad av tvivel kan man ha).

(b) Låt μ_1 vara väntevärdet vid den första mätningen och μ_2 väntevärdet vid mätningen en månad senare. För att bedöma om det har skett någon förändring av väntevärdet mellan de två mättillfällena ställer vi upp följande hypoteser.

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Leftrightarrow \mu_2 - \mu_1 = 0$
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \Leftrightarrow \mu_2 - \mu_1 \neq 0$

Dessa hypoteser kan testas med hjälp av ett konfidensintervall för $\mu_2 - \mu_1$, och om vi väljer signifikansnivån $\alpha = 5\%$ så ska konfidensgraden vara 95%.

Ett 95% konfidensintervall för $\mu_2 - \mu_1$ när stickproven kommer från varsin normalfördelning med samma okända standardavvikelse beräknas med formeln (se formelbladet):

$$\bar{x}_2 - \bar{x}_1 \pm t_{0.025}(n_1 + n_2 - 2)s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \quad \text{där} \quad s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Från uppgift (a) har vi att $n_1 = 4$, $\bar{x}_1 = 0.8675$ och $s_1 = 0.0946$. För det andra stickprovet av storlek $n_2 = 6$ bestäms medelvärde och standardavvikelse med hjälp av det givna konfidensintervallet 0.66 ± 0.12. Det är beräknat med formeln $\bar{x}_2 \pm t_{0.025}(5)s_2/\sqrt{6}$ och man ser att $\bar{x}_2 = 0.66$ och att $t_{0.025}(5)s_2/\sqrt{6}$ är lika med 0.12. Med $t_{0.025}(5) = 2.571$ (från tabell 5) beräknas standardavvikelsen till $s_2 = 0.12 \cdot \sqrt{6}/2.571 = 0.1143$. Den poolade standardavvikelsen kan nu beräknas och blir

$$s_p = \sqrt{\frac{3 \cdot 0.0946^2 + 5 \cdot 0.114^2}{8}} = 0.1073$$

Med $t_{0.025}(4 + 6 - 2) = 2.306$ kan slutligen det sökta konfidensintervallet beräknas till (efter avrundning):

$$-0.21 \pm 0.16 \quad \text{eller} \quad (-0.37, -0.05)$$

Eftersom noll inte ingår i intervallet så ska H_0 förkastas. Det har skett en statistiskt signifikant minskning av den genomsnittliga PFAS-halten mellan tillfälle 1 och 2, på nivån $\alpha = 5\%$.