Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Matematiska metoder för naturvetare, MM2004, den 21 februari 2024

1. (a) Vi skriver om olikheten

$$\frac{2}{x} \le 3-x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{x}-3+x \le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2-3x+2}{x} \le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(x-1)(x-2)}{x} \le 0$$

så vi kan ställa upp en teckentabell

x		0		1		2	
$x-1$	$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$
$x-2$	$---$	$-$	$---$	$-$	$---$	0	$+++$
x	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$
$\frac{(x-1)(x-2)}{x}$	$---$	$\wr$	$+++$	0	$---$	0	$+++$

Vi ser att olikheten är uppfylld precis då $x < 0$ eller $1 \le x \le 2$.

(b) Definitionsmängden för f är $\mathbb{R}$, och värdemängden $]0,\infty[$, så för $y > 0$ får vi

$$y = f(x) \quad\Leftrightarrow\quad y = \ln(e^{2x}+1) \quad\Leftrightarrow\quad e^y = e^{2x}+1$$
$$\Leftrightarrow\quad e^{2x} = e^y - 1 \quad\Leftrightarrow\quad 2x = \ln(e^y-1) \quad\Leftrightarrow\quad x = \ln(e^y-1)/2$$

Funktionen f är därmed inverterbar, och $f^{-1}(y) = \ln(e^y-1)/2$ för $y > 0$. Svaret är alltså att $f^{-1}(x) = \ln(e^x-1)/2$ för $x > 0$.

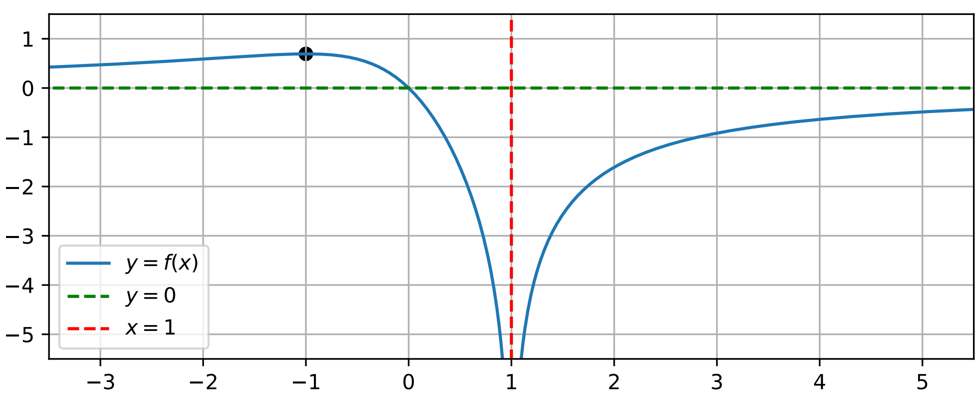
2. Funktionen $f(x) = 2\ln|x-1| - \ln(x^2+1)$ är definierad och kontinuerlig för alla $x \ne 1$, därmed är linjen $x = 1$ den enda möjliga vertikal asymptoten och eftersom $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$, så det är en asymptot.

Vi har $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(\frac{(1-1/x)^2}{1+1/x^2}\right) = \ln(1) = 0$ så $y = 0$ är en asymptot då $x \to \pm\infty$.

Vi får att $f'(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2(x+1)}{(x-1)(x^2+1)}$ så $f'(x) = 0$ bara för $x = -1$. Vi gör en teckentabell

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\wr$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\ln(2)$	$\searrow$	$\wr$	$\nearrow$

Från denna ser vi att funktionen bara har en har en lokal extrempunkt, ett maximum i $x = -1$. Med hjälp av en skiss av gafen ser vi att detta är funktionens globala maximum.



3. (a) Vi radreducerar den utökade koefficientmatrisen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 9 & 17 \\ 2 & 6 & 10 & 23 & 30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 12 & 17 & 16 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \; | \cdot -1$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Vi har att z är en fri variabel, så vi får att $w = 2$, $z = t$, $y = -3 - 2t$ och $x = 1 + t$, Ekvationssystemets lösningar är därmed

$$(x, y, z, w) = (1 + t, -3 - 2t, t, 2), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Vi får $(A \mid E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \end{array}\right) \; | \cdot -1 \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right) = (E \mid A^{-1}), \text{ så } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Man kontrollerar enkelt att vi faktiskt får $A^{-1}A = E$.

4. (a) Vi börjar med att bestämma en primitiv funktion $\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-3/2}\,dx = -2x^{-1/2} + C$, så

$$\int_3^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \lim_{N\to\infty} \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_3^N = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{N}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(b) Differentialekvationen är både separabel och linjär, vi väljer att lösa den som en linjär ekvation. Om vi skriver om den på formen $y' + g(x)y = h(x)$ får vi $y' - 2xy = -2x$, så $g(x) = -2x$, och därmed är den integrerande faktorn $e^{G(x)} = e^{-x^2}$ så vi får $(e^{-x^2}y)' = -2xe^{-x^2}$ vilket efter integrering ger $e^{-x^2}y = e^{-x^2} + C$, så $y = 1 + Ce^{x^2}$.
Begynnelsevillkoret ger $2 = y(0) = 1 + C$ så $C = 1$, så lösningen är $y = 1 + e^{x^2}$.

5. Låt A vara händelsen att en slumpmässigt vald person har körkort för bil och B händelsen att hen äger en bil. Följande sannolikheter är givna: $P(A) = 0.75$, $P(B) = 0.37$ och $P(B|A) = 0.48$.

(a) Att den valda personen både har körkort för bil och äger en bil svarar mot händelsen $A \cap B$ vilken inträffar med sannolikheten

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0.48 \cdot 0.75 = 0.36$$

(b) Att personen varken har körkort för bil eller äger en bil svarar mot händelsen $(A \cup B)^*$ vilken inträffar med sannolikheten

$$P((A \cup B)^*) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0.75 + 0.37 - 0.36) = 0.24$$

(c) Att personen har körkort för bil betingat av att hen äger en bil svarar mot händelsen $(A|B)$ vilken inträffar med sannolikheten

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.36}{0.37} \approx 0.973$$

(d) För att två händelser A och B ska vara oberoende måste $P(B|A)$ vara lika med $P(B)$. Det gäller inte här ty $P(B|A) = 0.48$ och $P(B) = 0.37$, så händelserna A och B är inte oberoende (utan beroende).

6. (a) Låt p_1 och p_2 vara proportionen smittade älgar i område 1 respektive område 2. För att statistiskt bedöma om dessa proportioner skiljer sig åt beräknas ett konfidensintervall för $p_1 - p_2$ med formeln

$$p_1^* - p_2^* \pm \lambda_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1^*(1-p_1^*)}{n_1} + \frac{p_2^*(1-p_2^*)}{n_2}}$$

Låt oss välja konfidensgrad $1 - \alpha = 95\%$ vilket ger $\lambda_{0.025} = 1.96$. Med $n_1 = 249$, $p_1^* = 53/249 = 0.213$, $n_2 = 253$ och $p_2^* = 46/253 = 0.182$ får man efter insättning intervallet 0.031 ± 0.070 eller $(-0.039, 0.101)$. Eftersom konfidensintervallet täcker in värdet noll (där noll skulle innebära att $p_1 = p_2$) så finns inte tillräckligt statistiskt stöd för att påstå att proportionen smittade älgar skiljer sig åt mellan de två områdena. (Man kan även utföra ett hypotestest med $H_0 : p_1 = p_2$ och $H_1 : p_1 \neq p_2$ och konstatera att H_0 inte kan förkastas, på signifikansnivån $\alpha = 5\%$.)

(b) Om de undersökta älgarna antas komma från samma älgpopulation beräknas ett 95% konfidensintervall för proportionen smittade älgar i den populationen med formeln

$$p^* \pm 1.96\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}$$

Med $n = 249+253 = 502$, $p^* = (53+46)/502 = 0.197$ får man efter insättning intervallet 0.197 ± 0.035 eller $(0.162, 0.232)$.