Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Matematiska metoder för naturvetare, MM2004, den 13 januari 2025

1. (a) Vi noterar först att vi måste ha $x > 0$. Då får vi att

$$\ln(3x) = \ln(15) - \ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(3x^2) = \ln(15) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 5,$$

så eftersom $x > 0$ blir den enda lösningen $x = \sqrt{5}$.

(b) Vi börjar med att bestämma skärningspunkterna mellan kurvorna. Ekvationen $2\sqrt{x} = x\sqrt{x}$ skrivs om som $\sqrt{x}(x-2) = 0$, så $x = 0$ eller $x = 2$.
På intervallet mellan $x = 0$ och $x = 2$ är $2\sqrt{x}$ den övre funktionen, så vi får att den sökta arean är

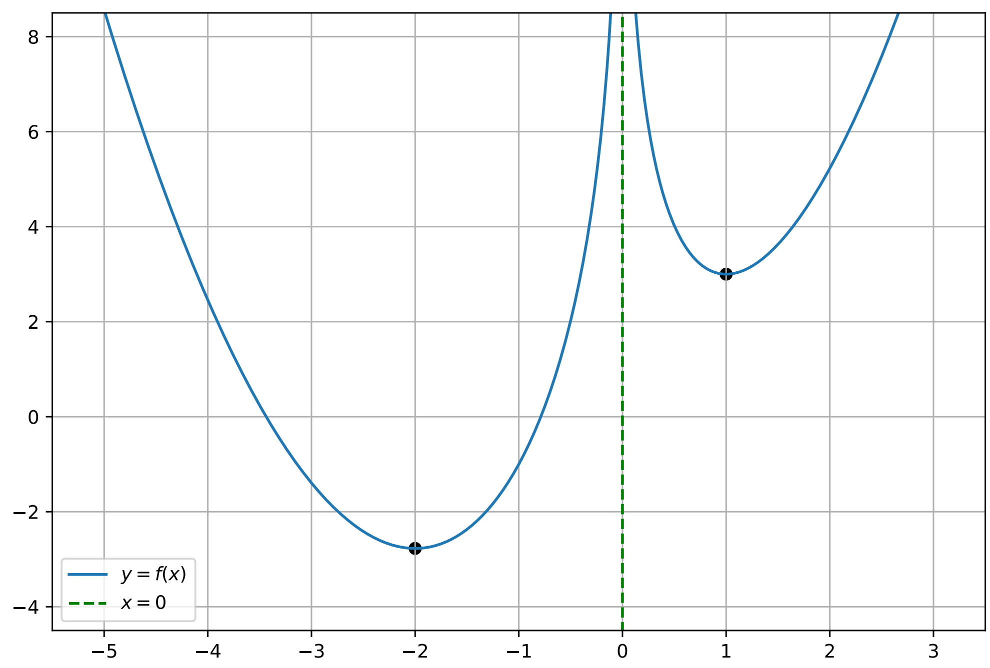
$$\int_0^2 \left(2x^{1/2} - x^{3/2}\right)\, dx = \left[\frac{4x^{3/2}}{3} - \frac{2x^{5/2}}{5}\right]_0^2 = \frac{16\sqrt{2}}{15}.$$

2. Vi observerar att funktionen $f(x) = x^2 + 2x - 4\ln|x|$ är definierad och kontinuerlig för alla x utom för $x = 0$, så vi har bara en möjlig vertikal asymptot. Vi ser vidare direkt att $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, så $x = 0$ är en asymptot. Eftersom polynom växer snabbare än logaritmer så har vi $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$. Därmed saknas horisontella asymptoter.

Vi får att $f'(x) = 2x + 2 - \frac{4}{x}$ så med hjälp av pq-formeln får vi att $f'(x) = 0$ för $x = -2$ och för $x = 1$. Vi gör en teckentabell:

x		-2		0		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\wr$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-4\ln(2)$	$\nearrow$	$\wr$	$\searrow$	3	$\nearrow$

Från denna ser vi att funktionen har ett lokalt minimum för $x = 1$, och och ett globalt minimum för $x = -2$. Lokala maximum saknas. Vi skissar grafen:



3. (a) Koefficientmatrisens determinant är

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 8-2a \\ 0 & 1 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= [\text{utv. efter kolonn 1}] = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8-2a \\ 1 & a-1 \end{vmatrix} = 3a - 9.$$

(b) Om $a = 3$ är ekvationssystemets totalmatris

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 8 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi ser att z blir en fri variabel. Sätter vi $z = t$, får vi $y = 2 - 2z = 2 - 2t$, och $x = y - 3z - 1 = 1 - 5t$, så ekvationssystemets lösningar ges av

$$(x, y, z) = (1 - 5t, 2 - 2t, t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

4. (a) Vi börjar med att bestämma en primitiv funktion

$$\int x^2 e^{-x^3}\,dx = \left[u = -x^3,\ -\frac{1}{3}\,du = x^2\,dx\right] = -\frac{1}{3}\int e^u\,du = -\frac{1}{3}e^u + C = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C$$

så $\displaystyle\int_1^\infty x^2 e^{-x^3}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{3}e^{-x^3}\right]_1^N = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{e^{-1}}{3} - \frac{e^{-N^3}}{3}\right) = \frac{1}{3e}.$

(b) Differentialekvationen är linjär. Om vi skriver om den på formen $y' + g(x)y = h(x)$ får vi

$$y' + \frac{3}{x}y = x,$$

så $g(x) = \frac{3}{x}$, och därmed är den integrerande faktorn $e^{G(x)} = e^{3\ln(x)} = x^3$. Vi får

$$(x^3 y)' = x^4,$$

vilket efter integrering ger $x^3 y = \frac{x^5}{5} + C$. Begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ ger nu $1 = 1/5 + C$, så $C = 4/5$. Lösningen är därmed $y(x) = \dfrac{4 + x^5}{5x^3}$.

5. (a) För slumpvariabeln X som svarar mot antal ungar som en björnhona får en enskild säsong ska väntevärde μ och standardavvikelse σ beräknas. Med given sannolikhetsfördelning får man

$$\mu = E(X) = \sum_k kP(X = k) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.1 = 1.3$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sum_k (k - \mu)^2 P(X = k)}$$

$$= \sqrt{(0 - 1.3)^2 \cdot 0.2 + (1 - 1.3)^2 \cdot 0.4 + (2 - 1.3)^2 \cdot 0.3 + (3 - 1.3)^2 \cdot 0.1} = 0.9$$

(b) Antal ungar som 100 björnhonor får tillsammans en enskild säsong kan beskrivas med en slumpvariabel $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$ där $X_1, X_2, ..., X_{100}$ är oberoende likafördelade slumpvariabler med väntevärde $\mu = 1.3$ och standardavvikelse $\sigma = 0.9$. Väntevärde och standardavvikelse för Y blir $\mu_Y = E(Y) = 100\mu = 100 \cdot 1.3 = 130$ och $\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{100\sigma^2} = 10 \cdot 0.9 = 9$. Enligt centrala gränsvärdessatsen gäller det approximativt att $Y \sim N(\mu = 130, \sigma = 9)$ och den sökta sannolikheten blir

$$P(Y > 140) = 1 - P(Y \leq 140) = 1 - \phi\left(\frac{140 - 130}{9}\right) = 1 - \phi(1.11) = 1 - 0.8665 \approx 0.13$$

6. (a) De sex mätningarna $x_1, ..., x_6$ kan antas vara utfall från en slumpvariabel $X \sim N(\mu, \sigma)$. Ett 95% konfidensintervall för μ beräknas med formeln

$$\bar{x} \pm t_{0.025}(n - 1)s/\sqrt{n}$$

Medelvärde och standardavvikelse för de $n = 6$ mätningarna blir $\bar{x} = 19.73$ och $s = 0.432$. Ur tabell 5 bestäms t-kvantilen till $t_{0.025}(5) = 2.571$, vilket ger konfidensintervallet

$$19.73 \pm 0.45 = (19.28,\ 20.18).$$

Med hjälp av det 95 % konfidensintervallet kan ett test av $H_0 : \mu = 20$ mot $H_1 : \mu \neq 20$ göras, på signifikansnivå 5 %. Eftersom konfidensintervallet innesluter värdet $\mu = 20$ så kan H_0 inte förkastas. Medelvikten μ avviker inte signifikant från 20 kg.

(b) För vart och ett av de 10 hypotestesten är sannolikheten 5% för ett signifikant utfall (en falsk signifikans). Man kan anta att utfallen av de 10 testen är oberoende av varandra eftersom det är olika fabrikat av trädgårdsjord. Om vi inför slumpvariabeln X för antalet signifikanta test av de 10 så är i så fall $X \sim Bin(n = 10, p = 0.05)$ och den sökta sannolikheten blir

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0.05^0 0.95^{10} = 1 - 0.95^{10} = 0.40$$