MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Examinator: Håkan Granath

Tentamensskrivning MM2004
Matematiska metoder för naturvetare
den 20 februari 2025

Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Betygsgränser:

Max	30 p	B	24 p	D	18 p
A	27 p	C	21 p	E	15 p

Tillåtna hjälpmedel: Utdelade formel- och tabellsamlingar samt utdelad miniräknare.

1. (a) Lös ekvationen $\ln(2x) + \ln(9x) = \ln(7x)$. (1p)

   (b) Bestäm arean av det ändliga område som begränsas av kurvorna $y = x^3$ och $y = 2x^2$. (2p)

   (c) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \Big(2\ln(3x) - \ln(x^2+1)\Big)$ (2p)

2. Rita grafen (5p)
$$y = \frac{x^2 - 3}{e^x}$$
   Ange alla asymptoter och lokala och globala extremvärden.

3. Låt $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Beräkna A^2, determinanten för A, samt inversen till A. (5p)

   Avgör om $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en egenvektor till A.

4. (a) Avgör om den generaliserade integralen (2p)
$$\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx$$
   är konvergent, och bestäm i så fall dess värde.

   (b) Lös, för $x > 0$, begynnelsevärdesproblemet (3p)
$$\begin{cases} x^3 y' = y^2 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Var god vänd!

5. (a) För två händelser A och B gäller det att $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.7$ och $P(A \cup B) = 1$. Avgör om A och B är oberoende händelser. (2p)

   (b) I en fruktskål finns fem äpplen. Alla ser fina ut på ytan men två av dem har börjat ruttna inifrån vilket gör dem oätbara. Om tre äpplen väljs slumpmässigt utan återläggning, hur stor är sannolikheten att minst två av dem är ätbara? (2p)

   (c) Bestäm väntevärdet av antal ätbara äpplen om tre väljs slumpmässigt utan återläggning som i uppgift (b). (1p)

6. Tabellen nedan visar årsmedeltemperatur och latitud för 11 orter i Sverige år 2022.

Latitud	66.6	63.5	63.1	60.4	59.2	59.3	57.4	57.6	57.8	56.7	55.7
Årsmedel-temperatur	-0.6	4.0	4.2	5.8	7.0	7.6	6.0	7.6	7.7	7.5	8.5

För att beskriva sambandet mellan årsmedeltemperatur och latitud anpassas en linjär regressionsmodell $y = a + bx$, med latitud som x-variabel och årsmedeltemperatur som y-variabel. Följande skattningar erhölls: $\hat{a} = 49.2$ och $\hat{b} = -0.72$.

   (a) Använd modellen för att beräkna den förväntade årsmedeltemperaturen för Falun vars latitud är 60.6. (1p)

   (b) Beräkna ett 95% konfidensintervall för parametern b i modellen. Ska hypotesen $H_0 : b = -1.0$ förkastas till förmån mot $H_1 : b \neq -1.0$ om signifikansnivå 5% används? (3p)

   (c) Beräkna modellens förklaringsgrad. (1p)

Räknehjälp:

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 112.8$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = 63.31$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -81.59$$