Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Matematiska metoder för naturvetare, MM2004, den 29 februari 2025

1. (a) Vi noterar först att vi måste ha $x > 0$. Då får vi att

$$\ln(2x) + \ln(9x) = \ln(7x) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2x \cdot 9x) = \ln(7x) \quad \Leftrightarrow \quad 18x^2 = 7x,$$

så eftersom $x > 0$ blir den enda lösningen $x = \frac{7}{18}$.

(b) Vi börjar med att bestämma skärningspunkterna mellan kurvorna. Ekvationen $2x^2 = x^3$ skrivs om som $x^2(x-2) = 0$, så $x = 0$ eller $x = 2$.

På intervallet mellan $x = 0$ och $x = 2$ är $2x^2$ den övre funktionen, så vi får att den sökta arean är

$$\int_0^2 \left(2x^2 - x^3\right) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

(c) Vi får att $\lim_{x\to\infty} \left(2\ln(3x) - \ln(x^2+1)\right)$

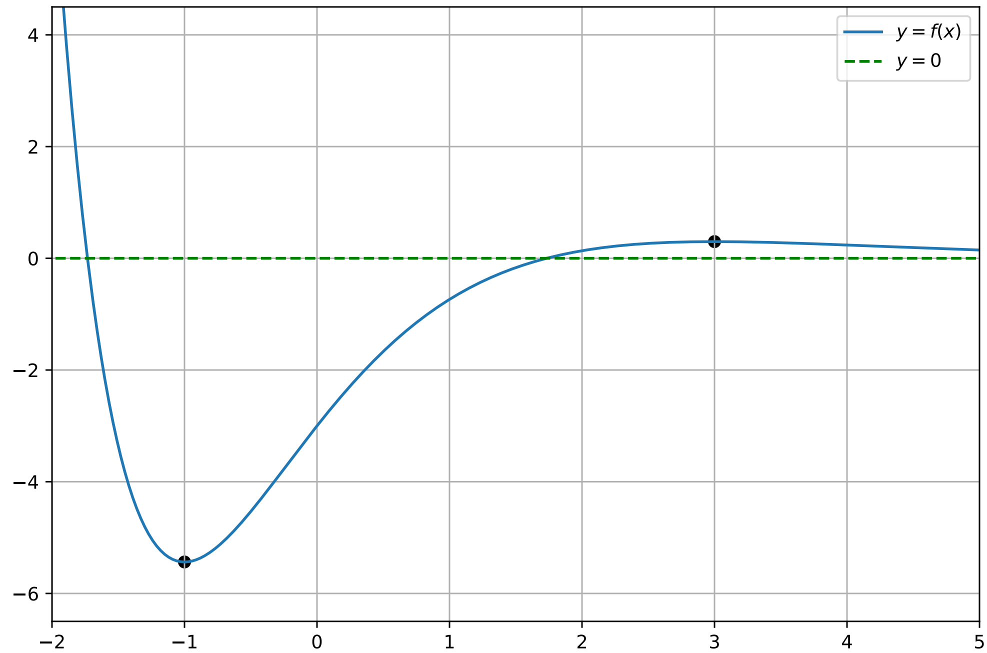
$$= \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{(3x)^2}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{9}{1+1/x^2}\right) = \ln(9) = 2\ln(3).$$

2. Vi observerar att funktionen $f(x) = (x^2-3)e^{-x}$ är definierad och kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$, så vi har inga vertikala asymptoter. Eftersom exponentialfunktioner växer snabbare än polynom så har vi $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, så $y = 0$ är en horisontell asymptot. Då $x \to -\infty$ är funktionen obegränsad.

Vi får att $f'(x) = (2x - x^2 + 3)e^{-x} = -(x+1)(x-3))e^{-x}$ så får vi att $f'(x) = 0$ för $x = -1$ och för $x = 3$. Vi gör en teckentabell:

x		-1		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	$6/e^3$	$\searrow$

Vi skissar nu grafen, och från denna ser vi att funktionen har ett globalt minimum för $x = -1$ och och ett lokalt maximum för $x = 3$. Globalt maximum saknas.



3. Vi får direkt att $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -4 \\ 8 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & -8 \end{pmatrix}$, och $\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = [utv. rad 2] =
$= -4\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4(0-6) = 24$. Inversen bestäms genom:

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \mid \cdot (1/2) \\ \mid \cdot (1/3) \\ \mid \cdot (1/4) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 0 \end{array}\right) = (E \mid A^{-1})$$

Man får $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ som inte är på formen λX, så X är ingen egenvektor till A.

4. (a) Vi börjar med att bestämma en primitiv funktion med partialintegrering

$$\int xe^{-2x}\,dx = -\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x} + C$$

så $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x}\right]_0^N = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{2N+1}{4e^{2N}}\right) = \frac{1}{4}$.

(b) Differentialekvationen $x^3y' = y^2$ är separabel. Om vi skriver om den som $\frac{1}{y^2}y' = \frac{1}{x^3}$ och integrerar båda sidor får vi att $\frac{-1}{y} = -\frac{1}{2x^2} + C$ Utnyttjar vi begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ får vi $C = -\frac{1}{2}$, vilket ger att $\frac{1}{y} = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}$, så $y = \frac{2x^2}{x^2+1}$.

5. (a) Två händelser A och B är oberoende om $P(A\cap B) = P(A)P(B)$. Ur sambandet $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ får man

$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) = 0.4 + 0.7 - 1 = 0.1$$

vilket inte är lika med

$$P(A)P(B) = 0.4 \cdot 0.7 = 0.28.$$

A och B är alltså inte oberoende händelser (utan beroende).

(b) Om vi låter X vara antalet ätbara äpplen så är

$$X \sim \text{Hyp}(N = 5,\ n = 3,\ p = 3/5)$$

och den sökta sannolikheten blir:

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} + \frac{\binom{3}{3}\binom{2}{0}}{\binom{5}{3}} = 0.70.$$

(c) $E(X) = np = 3 \cdot 3/5 = 1.8$.

6. (a) Förväntad årsmedeltemperatur för Falun med latitud 60.6 blir

$$49.2 - 072 \cdot 60.6 \approx 5.6$$

(b) Ett 95% konfidensintervall för lutningskoefficienten b beräknas med formeln:

$$\beta^* \pm t_{0.025}(n-2)s/\sqrt{S_{xx}}$$

där s är skattningen av σ vilken beräknas med formeln

$$\sigma^* = s = \sqrt{\frac{S_{yy} - \beta^* S_{xy}}{n-2}}$$

Med givna värden $\beta^* = -0.72$, $S_{yy} = 63.31$, $S_{xy} = -81.59$, $n = 11$ blir $s = 0.712$. För beräkning av konfidensintervallet bestäms t-kvantilen ur tabell till $t_{0.025}(9) = 2.262$. Med $S_{xx} = 112.8$ och övriga givna värden beräknas intervallet till -0.72 ± 0.15 eller $(-0.57\ ,\ -0.87)$.

Hypotesen $H_0 : b = -1.0$ ska förkastas på signifikansnivå 5% eftersom -1.0 inte innesluts av det 95%-iga konfidensintervallet.

(c) Modellens förklaringsgrad beräknas med formeln $R^2 = r^2$ där $r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$. Med insatta värden blir förklaringsgraden $R = 0.93$.