

Lösningsskisser till tentamen i Matematiska metoder för naturvetare, MM2004, den 12 juni 2025

1. (a) Vi får

$$\log_3 \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = 3^2 \Leftrightarrow x+1 = 9x-9 \Leftrightarrow x = 5/4.$$

- (b) Vi observerar först att vi måste ha $x \geq 0$. För att bestämma skärningspunkterna mellan kurvorna ställer vi upp ekvationen $4\sqrt{x} = x^2\sqrt{x}$, vilken kan skrivas om till $\sqrt{x}(x^2 - 4) = 0$. Eftersom $x \geq 0$ fås lösningarna $x = 0$ och $x = 2$. På intervallet $[0, 2]$ är $4\sqrt{x}$ den övre funktionen, så vi får att den sökta arean är

$$\int_0^2 (4\sqrt{x} - x^2\sqrt{x}) dx = \left[\frac{8x^{3/2}}{3} - \frac{2x^{7/2}}{7} \right]_0^2 = \frac{64\sqrt{2}}{21}.$$

- (c) Vi får med logaritmlagarna att $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(1 + 3x^2) - 2\ln(x))$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1 + 3x^2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1}{x^2} + 3 \right) = \ln(3).$$

2. Vi observerar att funktionen $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ är definierad och kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$, så vi har inga vertikala asymptoter. Vi får dock att

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(1 + 1/x)^2}{1 + 1/x^2} = 1,$$

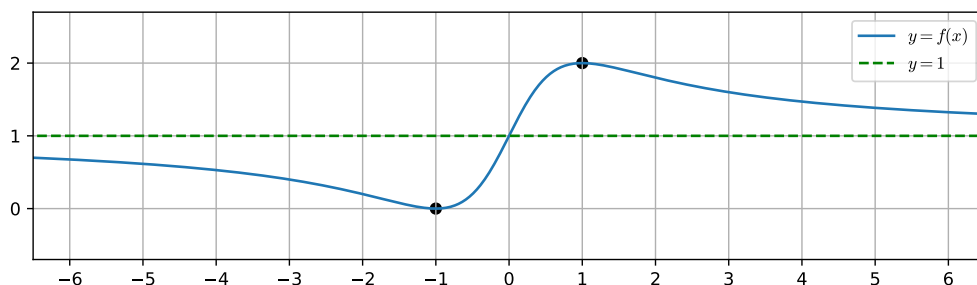
så $y = 1$ är en horisontell asymptot. Efter förenkling får man att

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(1-x)}{(x^2+1)^2},$$

så vi får vi att $f'(x) = 0$ för $x = \pm 1$. Vi gör en teckentabell:

x	-1		1	
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

Vi kan nu skissa grafen, och från denna ser vi att funktionen har ett globalt minimum $f(-1) = 0$ och ett globalt maximum $f(1) = 2$.



3. (a) Vi radreducerar den utökade koefficientmatrisen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{c} \boxed{+}^{-1} \\ \leftarrow \boxed{+} \\ \leftarrow \boxed{+} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{c} \boxed{+}^{-2} \\ \leftarrow \boxed{+} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Vi har att z är en fri variabel, så vi får att $w = 1$, $z = t$, $y = z - w + 1 = t$ och $x = -2z - w - 1 = -2t - 2$, Ekvationssystemets lösningar är därmed

$$(x, y, z, w) = (-2 - 2t, t, t, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Vi får $(A | E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \boxed{+}^{-1} \\ \leftarrow \boxed{+} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \leftarrow \boxed{+} \\ \leftarrow \boxed{+} \end{array}$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} | \cdot -1/2 \\ | \cdot 1/3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \leftarrow \boxed{+} \\ \boxed{+}^{-2} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 \end{array} \right) = (E | A^{-1}), \text{ så } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. (a) Vi bestämmer en primitiv funktion med hjälp av en substitution:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4 - 1}} dx = \left[u = x^4 - 1, \frac{1}{4} du = x^3 dx \right] = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du$$

$$= \frac{1}{4} \int u^{-1/2} du = \frac{u^{1/2}}{2} + C = \frac{1}{2} \sqrt{x^4 - 1} + C.$$

- (b) Differentialekvationen är linjär. Om vi skriver om den på formen $y' + g(x)y = h(x)$ får vi

$$y' - \frac{2}{x}y = x,$$

så $g(x) = -\frac{2}{x}$, och därmed är den integrerande faktorn $e^{G(x)} = e^{-2\ln(x)} = \frac{1}{x^2}$. Vi får

$$\left(\frac{1}{x^2} y \right)' = \frac{1}{x},$$

vilket efter integrering ger $\frac{1}{x^2} y = \ln(x) + C$. Begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ ger nu $1 = 0 + C$, så konstanten $C = 1$. Lösningen är därmed $y(x) = x^2(1 + \ln(x))$.

5. (a) Avrundningsfelet kan beskrivas med en slumpvariabel X som är likformigt fördelad på intervallet $(-0.5, 0.5)$. Täthetsfunktionen för X är enligt formelbladet $f(x) = 1/(0.5 - (-0.5)) = 1$ och den sökta sannolikheten blir:

$$P(|X| > 0.1) = 1 - P(-0.1 \leq X \leq 0.1) = 1 - \int_{-0.1}^{0.1} 1 dx = 1 - 0.2 = 0.8$$

- (b) Låt Y vara summan av 100 oberoende avrundningsfel $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ där varje avrundningsfel är likformigt fördelat på intervallet $(-0.5, 0.5)$, med $E(X_i) = (-0.5 + 0.5)/2 = 0$ och $V(X_i) = (0.5 - (-0.5))^2/12 = 1/12$. Enligt centrala gränsvärdessatsen är $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$ approximativt normalfördelad med väntevärde $E(Y) = 100 \cdot 0 = 0$ och $V(Y) = 100 \cdot 1/12 = 100/12$. Vidare är standardavvikelsen för Y lika med $\sqrt{100/12} = 10/\sqrt{12}$ så approximativt är $Y \sim N(\mu = 0, \sigma = 10/\sqrt{12})$ och den sökta sannolikheten blir:

$$P(|Y| > 2) = 1 - P(-2 \leq Y \leq 2) = 1 - \left(\Phi\left(\frac{2-0}{10/\sqrt{12}}\right) - \Phi\left(\frac{-2-0}{10/\sqrt{12}}\right) \right) \approx 0.49$$

6. (a) Låt μ_t vara genomsnittlig blyhalt i blodet hos barn i tätort och μ_l vara genomsnittlig blyhalt i blodet hos barn i omgivande landsbygd. Ett 95% konfidensintervall för $\mu_t - \mu_l$ beräknas med formeln

$$\bar{x}_t - \bar{x}_l \pm t_{0.025}(n_t + n_l - 2)s_p \sqrt{\frac{1}{n_t} + \frac{1}{n_l}} \quad \text{där} \quad s_p = \sqrt{\frac{(n_t - 1)s_t^2 + (n_l - 1)s_l^2}{n_t + n_l - 2}}$$

Medelvärden och standardavvikelser beräknas till $\bar{x}_t = 8.28$, $s_t = 1.602$, $\bar{x}_l = 5.02$, $s_l = 1.366$ och $s_p = 1.489$. Ur tabell bestäms t-kvantilen som blir $t_{0.025}(8) = 2.306$.

Med insatta värden beräknas konfidensintervallet till $3, 26 \pm 2.17$ eller $(1.09, 5.43)$. Tolkning: Skillnaden i genomsnittlig blyhalt i blodet mellan barn i tätort och barn i omgivande landsbygd, $\mu_t - \mu_l$, är i intervallet $(1.09, 5.43)$ med sannolikhet 95% .

- (b) Vi ställer upp följande hypoteser:

$$H_0 : \mu_t = \mu_l \Leftrightarrow \mu_t - \mu_l = 0$$

$$H_0 : \mu_t \neq \mu_l \Leftrightarrow \mu_t - \mu_l \neq 0$$

Om signifikansnivån väljs till $\alpha = 5\%$ så kan testet göras med konfidensintervall som beräknades i uppgift a. Eftersom noll inte ingår i intervallet ska H_0 förkastas, och eftersom konfidensintervallets nedre gräns är större än noll innebär det att den genomsnittliga blyhalten i blodet hos barn i tätort är signifikant högre än hos barn i omgivande landsbygd.