

Lösningsskisser till tentamen i Matematiska metoder för naturvetare, MM2004, den 14 januari 2026

1. (a) Vi noterar först att vi måste ha $x > 0$. Då får vi att

$$\ln(3x) = 2 \ln(6) - \ln(4x) \Leftrightarrow \ln(3x) + \ln(4x) = 2 \ln(6)$$

$$\Leftrightarrow \ln(12x^2) = \ln(36) \Leftrightarrow 12x^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 = 3,$$

så eftersom $x > 0$ blir den enda lösningen $x = \sqrt{3}$.

- (b) Låt $f(x) = 4 - x$ och $g(x) = 3/x$. Skärningspunkterna för graferna $y = f(x)$ och $y = g(x)$ fås av ekvationen $f(x) = g(x)$ som ger

$$\frac{3}{x} = 4 - x \Leftrightarrow 3 = 4x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0,$$

dvs $x = 1$ och $x = 3$. På intervallet $[1, 3]$ är $f(x) \geq g(x)$ (eftersom $f(2) = 2 > 3/2 = g(2)$), så den sökta arean är

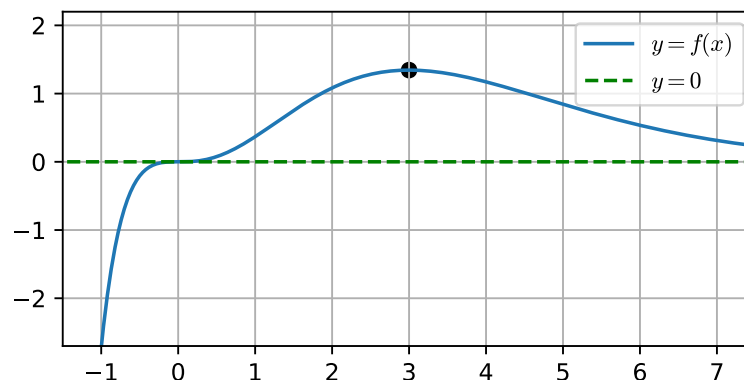
$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 (f(x) - g(x)) \, dx = \int_1^3 \left((4 - x) - \frac{3}{x} \right) \, dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} - 3 \ln(x) \right]_1^3 \\ &= \left(12 - \frac{9}{2} - 3 \ln(3) \right) - \left(4 - \frac{1}{2} - 3 \ln(1) \right) = 4 - 3 \ln(3). \end{aligned}$$

2. Funktionen $f(x) = x^3 e^{-x}$ är definierad och kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$, därmed kan det inte finnas någon vertikal asymptot. Vi har $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ så vi har ingen asymptot då $x \rightarrow -\infty$, men $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (exponentialfunktioner vinner över potensfunktioner) så $y = 0$ är grafens enda asymptot.

Vi får att $f'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = x^2(3 - x)e^{-x}$ så $f'(x) = 0$ för $x = 0$ och för $x = 3$. Vi gör en teckentabell

x	0		3	
$f'(x)$	+	0	+	0
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\searrow$

Från denna ser vi att funktionen bara har en lokal extrempunkt, ett maximum i $x = 3$ som även är funktionens globala maximum. Den andra stationära punkten $x = 0$ är en terrasspunkt, och globalt minimum saknas. Vi skissar grafen:



3. (a) Först gör vi en radoperation och sedan utvecklar vi efter andra raden:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\leftarrow +]{-1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

$$\begin{aligned} \text{(b) Vi får } (A | E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{-1} \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{-1} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) | \cdot -1 \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{-1} \xrightarrow[\leftarrow -2]{+} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right) \\ &= (E | A^{-1}), \text{ så } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{(c) Vi får att } X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

4. (a) Vi börjar med att bestämma en primitiv funktion med partialintegrering

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C$$

$$\text{så } \int_2^\infty x e^{-x} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} [-(x+1)e^{-x}]_2^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(-\frac{N+1}{e^N} + 3e^{-2} \right) = \frac{3}{e^2}.$$

- (b) Differentialekvationen $y' - x\sqrt{y} = 0$ är separabel. Om vi skriver om den som $y^{-1/2}y' = x$ och integrerar båda sidor får vi att $2y^{1/2} = \frac{x^2}{2} + C$. Utnyttjar vi begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ får vi $C = \frac{3}{2}$, vilket ger $2\sqrt{y} = \frac{x^2+3}{2}$.

$$\text{Svaret blir därmed att } y(x) = \frac{(x^2+3)^2}{16}.$$

5. (a) Medelvärde $\bar{X}$ av 9 äpplen blir $\bar{X} \sim N\left(200, \frac{30}{\sqrt{9}}\right) = N(30, 10)$, så

$$P(\bar{X} > 215) = P\left(\frac{\bar{X} - 200}{10} > 1.5\right) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

- (b) Sannolikheten att ett äpple väger mindre än 200 gram är precis 0.5, så om N är antalet äpplen som väger under 200 gram är $N \sim \text{Bin}(10, 0.5)$ så från binomialfördelningstabellen får vi $P(N \leq 2) = 0.0547$.
- (c) Om äpplets vikt är $X \sim N(200, 30)$ och päronets $Y \sim N(180, 20)$ får vi $Y - X \sim N(-20, \sqrt{30^2 + 20^2})$ så

$$\begin{aligned} P(Y > X) &= P(Y - X > 0) = P\left(\frac{Y - X + 20}{\sqrt{30^2 + 20^2}} > \frac{0 + 20}{\sqrt{30^2 + 20^2}}\right) \\ &= 1 - \Phi(0.55) = 1 - 0.7088 = 0.2912, \end{aligned}$$

så sannolikheten är cirka 29%.

6. (a) Skattningen $\hat{p}$ av p blir $\hat{p} = \frac{158}{263} = 0.6008$, så ett 99% konfidensintervall för p blir

$$I_p = \hat{p} \pm \lambda_{0.005} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{263}} = 0.6008 \pm 2.5762 \sqrt{\frac{0.6008 \cdot 0.3992}{263}} = 0.6008 \pm 0.0778,$$

så $I_p = (0.52, 0.68)$.

- (b) Vi ställer upp hypoteserna

$$H_0 : p = \frac{1}{2} \quad \text{vs.} \quad H_1 : p \neq \frac{1}{2}$$

och väljer signifikansnivån 1%. Eftersom $\frac{1}{2}$ inte ligger i det 99%-iga konfidensintervallet vi beräknade i (a) förkastar vi nollhypotesen och drar slutsatsen att andelen galaxer som roterar medurs signifikant (på 1%-nivån) avviker från det förväntade resultatet.