

Lösningsskisser till tentamen i Matematiska metoder för naturvetare, MM2004, den 11 februari 2026

1. (a) Vi får vi att

$$\log_3 \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{x-1} = 3^2$$
$$\Leftrightarrow x+1 = 9x-9 \quad \Leftrightarrow \quad 8x = 10 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5/4.$$

- (b) Låt $f(x) = 2x\sqrt{x}$ och $g(x) = x^2\sqrt{x}$. Skärningspunkterna för graferna $y = f(x)$ och $y = g(x)$ fås av ekvationen $f(x) = g(x)$ som ger

$$2\sqrt{x} = x^2\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad x\sqrt{x}(2-x) = 0,$$

dvs $x = 0$ och $x = 2$. Eftersom $f(1) = 2 > 1 = g(2)$ så är $f(x) \geq g(x)$ på intervallet $[0, 2]$. Den sökta arean är därmed

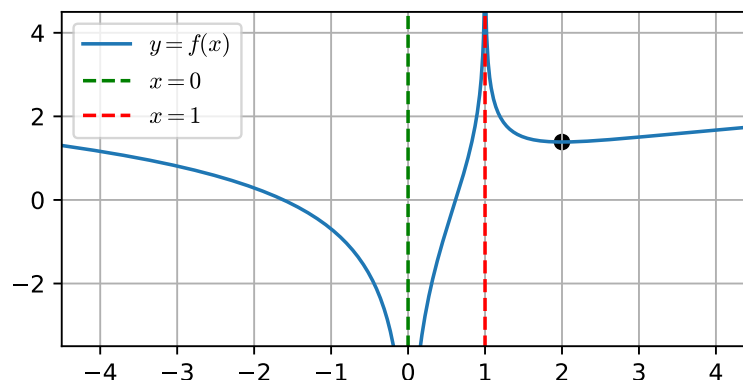
$$A = \int_0^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^2 (2x^{3/2} - x^{5/2}) dx = \left[\frac{4}{5}x^{5/2} - \frac{2}{7}x^{7/2} \right]_0^2$$
$$= \frac{4}{5}2^{5/2} - \frac{2}{7}2^{7/2} = 2^{5/2} \left(\frac{4}{5} - \frac{4}{7} \right) = \frac{32\sqrt{2}}{35}.$$

2. Funktionen $f(x) = \ln(x^2) - \ln|x-1|$ är definierad för alla reella x utom för $x = 0$ och $x = 1$. Eftersom $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ är både $x = 0$ och $x = 1$ vertikala asymptoter. Vi har dock att $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$, så horisontella asymptoter saknas.

Efter förenkling får vi att $f'(x) = \frac{x-2}{x(x-1)}$ så $f'(x) = 0$ bara för $x = 2$. Vi gör en teckentabell

x	0		1		2		
$f'(x)$	-	$\cap$	+	$\cup$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$\cap$	$\nearrow$	$\cup$	$\searrow$	$\ln(4)$	$\nearrow$

Från denna ser vi att funktionen bara har en lokal extrempunkt, ett minimum i $x = 2$. Funktionen saknar globala extrempunkter eftersom värdemängden är hela $\mathbb{R}$. Vi skissar grafen:



3. (a) Först gör vi två radoperationer och sedan utvecklar vi efter första kolonnen:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \boxed{-1} \\ 1 & -1 & a & \leftarrow + \\ 1 & a & -1 & \leftarrow + \end{array} \right|^{-1} = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & a-1 & 5 \\ 0 & a-1 & -2 & 1 \end{array} \right| \\ &= \left| \begin{array}{cc|c} -2 & a-1 & 1 \\ a-1 & -2 & \end{array} \right| = 4 - (a-1)^2 = 3 + 2a - a^2.\end{aligned}$$

- (b) Om $a = 0$ är determinanten $-3 \neq 0$ så ekvationssystemet har unik lösning.
(c) Vi radreducerar den utökade koefficientmatrisen:

$$\begin{aligned}& \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \boxed{-1} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array}^{-1} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \leftarrow + \end{array} \mid \cdot -1/2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).\end{aligned}$$

Vi har att z är en fri variabel, så vi får att $z = t$, $y = z - 1 = t - 1$ och $x = 3 - y - z = 3 - (t - 1) - t = 4 - 2t$. Ekvationssystemets lösningar är därmed

$$(x, y, z) = (4 - 2t, t - 1, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. (a) Vi gör en substitution och får: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x) + 1} dx = \left[\frac{u=\cos(x)}{du=-\sin(x) dx} \right]$

$$= - \int_1^0 \frac{du}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \left[\arctan(u) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

- (b) Vi bestämmer en primitiv funktion med hjälp av en substitution:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4-1}} dx &= \left[u = x^4 - 1, \frac{1}{4} du = x^3 dx \right] = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du \\ &= \frac{1}{4} \int u^{-1/2} du = \frac{u^{1/2}}{2} + C = \frac{1}{2} \sqrt{x^4-1} + C.\end{aligned}$$

- (c) Differentialekvationen är linjär. Om vi skriver om den på formen $y' + g(x)y = h(x)$ får vi

$$y' - \frac{2}{x}y = x,$$

så $g(x) = -\frac{2}{x}$, och därmed är den integrerande faktorn $e^{G(x)} = e^{-2 \ln(x)} = \frac{1}{x^2}$. Vi får

$$\left(\frac{1}{x^2} y \right)' = \frac{1}{x},$$

vilket efter integrering ger $\frac{1}{x^2} y = \ln(x) + C$. Begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ ger nu $1 = 0 + C$, så konstanten $C = 1$. Lösningen är därmed $y(x) = x^2(1 + \ln(x))$.

5. (a) Om X är antalet kunder under 8 timmar är $X \sim \text{Po}(32)$, så genomsnittliga antalet kunder under en dag är $E(X) = 32$.
- (b) Låt Y vara antalet kunder under en halvtimme, så $Y \sim \text{Po}(2)$. Från Poisson-fördelningstabellen får vi

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - 0.6767 = 0.3233,$$

så sannolikheten är ca 32%.

- (c) Om Z är antalet kunder under en vecka är $Z \sim \text{Po}(160) \approx N(160, \sqrt{160})$ så

$$\begin{aligned} P(Z \geq 150) &= P\left(\frac{Z - 160}{\sqrt{160}} \geq \frac{-10}{\sqrt{160}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{-10}{\sqrt{160}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{160}}\right) = \Phi(0.79) = 0.7852. \end{aligned}$$

Det är alltså ungefär 79% chans att minst 150 kunder besöker butiken.
(Anm. Räknar man med halvtalskorrektion får man $\Phi(0.83) = 0.7967$.)

6. Det handlar om stickprov i par. Vi låter $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ vara pH före kalkning och $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ vara pH efter kalkning. Vi ställer upp hypoteserna

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

och väljer signifikansnivån 5%. Vi låter $D = Y - X \sim N(\mu_D, \sigma)$, där $\mu_D = \mu_2 - \mu_1$, och genomför hypotestestet genom att bestämma ett konfidensintervall för μ_D .

Från mätningarna får vi differenserna

i	1	2	3	4	5	6	7	8
D_i	0.4	0.5	0.6	0.6	0.9	1.0	0.3	-0.1

från vilket man beräknar

$$\bar{D} = 0.525 \quad \text{och} \quad \sum_{i=1}^8 D_i^2 = 3.04,$$

så stickprovsvariansen blir $s^2 = \frac{1}{7}(3.04 - 8 \cdot 0.525^2) = 0.1193$. Därmed har vi att $s = 0.3454$ så ett 95% konfidensintervall blir

$$I_D = \bar{D} \pm t_{0.025}(7) \frac{s}{\sqrt{8}} = 0.525 \pm 2.365 \frac{0.3454}{\sqrt{8}} = 0.525 \pm 0.288 = (0.24, 0.81).$$

Eftersom 0 inte ligger i konfidensintervallet förkastar vi nollhypotesen och drar slutsatsen att kalkningen signifikant (på nivån 5%) ökar pH i sjöarna