

Lösningsskisser till tentamen i Matematiska metoder för naturvetare, MM2004, den 27 augusti 2026

1. (a) Låt $f(x) = x^3$ och $g(x) = 9x$. Skärningspunkterna för graferna $y = f(x)$ och $y = g(x)$ fås av ekvationen $f(x) = g(x)$ som ger

$$x^3 = 9x \Leftrightarrow x(x^2 - 9) = 0,$$

dvs $x = 0$ och $x = \pm 3$, men eftersom vi har $x \geq 0$ får vi de två skärningspunkterna $x = 0$ och $x = 3$. Eftersom $f(1) = 1 < 9 = g(1)$ så är $f(x) \leq g(x)$ på intervallet $[0, 3]$. Den sökta arean är därmed

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 (g(x) - f(x)) \, dx = \int_0^3 (9x - x^3) \, dx = \left[\frac{9x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^3 \\ &= \frac{81}{2} - \frac{81}{4} = \frac{81}{4}. \end{aligned}$$

- (b) Med logaritmlagarna får vi

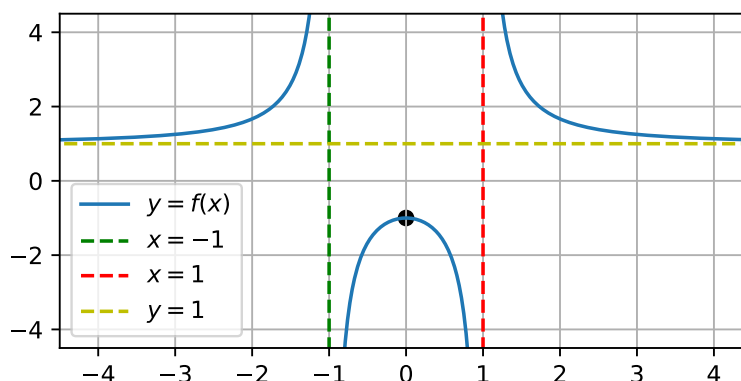
$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(3x+1) + \ln(2x-1) - 2\ln(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{(3x+1)(2x-1)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(6 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \ln(6). \end{aligned}$$

2. Funktionen $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ är definierad för alla reella x utom för $x = \pm 1$. Eftersom $\lim_{x \rightarrow 1\pm} f(x) = \pm\infty$ och $\lim_{x \rightarrow -1\pm} f(x) = \mp\infty$ är både $x = -1$ och $x = 1$ vertikala asymptoter. Vi har vidare att $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+1/x^2}{1-1/x^2} = 1$, så $y = 1$ är en tvåsidig horisontell asymptot.

Efter förenkling får vi att $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$ så $f'(x) = 0$ bara för $x = 0$. Vi gör en teckentabell

x	-1		0		1	
$f'(x)$	+	$\wr$	+	0	-	$\wr$
$f(x)$	$\nearrow$	$\wr$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\wr$

Från denna ser vi att funktionen bara har en lokal extrempunkt, ett maximum i $x = 0$. Funktionen saknar globala extrempunkter. Vi skissar grafen:



3. (a) Vi radreducerar den utökade koefficientmatrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -1 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vi har att y och w är fria variabler, så vi får att $u = -1$, $w = t$, $z = -w + 1 = 1 - t$, $y = s$ och $x = 4 - 3y - 2z - 3w = 4 - 3s - 2(1 - t) - 3t = 2 - t - 3s$. Ekvationssystemets lösningar är därmed

$$(x, y, z, w, u) = (2 - t - 3s, s, 1 - t, t, -1), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

(b) Vi får $(A \mid E) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \mid \cdot (-1)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (E \mid A^{-1}), \text{ så } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. (a) Med partialintegrering får vi:

$$\begin{aligned} \int (3x^2 + 1) \ln(x) dx &= (x^3 + x) \ln(x) - \int (x^3 + x) \frac{1}{x} dx \\ &= (x^3 + x) \ln(x) - \int (x^2 + 1) dx \\ &= (x^3 + x) \ln(x) - \frac{x^3}{3} - x + C. \end{aligned}$$

- (b) Differentialekvationen $y' = e^{x+y}$ är separabel. Om vi skriver om den som $e^{-y}y' = e^x$ och integrerar båda sidor får vi att $-e^{-y} = e^x + C$. Utnyttjar vi begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ får vi $C = -2$, vilket ger att $e^{-y} = 2 - e^x$, så $y = -\ln(2 - e^x)$.

För att lösningen skall vara definierad behöver vi $2 - e^x > 0$, dvs $e^x < 2$, så lösningen är definierad på intervallet $(-\infty, \ln(2))$.

5. (a) Om X är vikten av en slumpmässig limpa är $X \sim N(840, 30)$, så blir

$$\begin{aligned} P(X < 800) &= P\left(\frac{X - 840}{30} < \frac{800 - 840}{30}\right) = \Phi(-1.33) \\ &= 1 - \Phi(1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918 = p, \end{aligned}$$

så sannolikheten är ca 9%.

- (b) Om Y är antalet limpor som väger under 800g så är $Y \sim \text{Bin}(10, p)$. Från binomialfördelningstabellen får vi $P(Y \leq 2) \approx 0.93$.

- (c) Låt Z vara antalet limpor som väger under 800g. Vi har $Z \sim \text{Bin}(200, p)$, och eftersom $200p(1 - p) = 16.67 > 10$ kan vi använda normalapproximation $Y \approx N(200p, \sqrt{200p(1 - p)}) = N(18.36, 4.08)$. Detta ger

$$\begin{aligned} P(Z \geq 25) &\approx P\left(\frac{Z - 18.36}{4.08} \geq \frac{24.5 - 18.36}{4.08}\right) = 1 - \Phi(1.50) \\ &= 1 - 0.9332 = 0.0668, \end{aligned}$$

så sannolikheten är ungefär 7%.

6. (a) Vi har att $n = 5$, och får $\bar{x} = 1.34$ och $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 9.45$, så stickprovsvariansen blir $s^2 = \frac{1}{4}(9.45 - 5 \cdot 1.34^2) = 0.118$, så $s = 0.3435$. Från tabellen får vi att $t_{0.025}(4) = 2.776$, så konfidensintervallet blir

$$I_\mu = \bar{x} \pm t_{0.025}(4) \frac{s}{\sqrt{5}} = 1.34 \pm 0.43 = (0.91, 1.77).$$

- (b) Vi ställer upp hypoteserna

$$H_0 : \mu = 1.0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq 1.0$$

och väljer signifikansnivån 5%. Eftersom 1.0 inte ingår i det 95%-iga konfidensintervall vi beräknade i (a) kan nollhypotesen inte förkastas, så vi har inte stöd för att påståendet $\mu = 1.0$ skulle vara falskt.

- (c) Med $n = 20$ men samma $\bar{x}$ och s som ovan får vi ett 95% konfidensintervall

$$I_\mu = \bar{x} \pm t_{0.025}(19) \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.34 \pm 2.093 \frac{0.3435}{\sqrt{20}} = 1.34 \pm 0.16 = (1.18, 1.50).$$

Eftersom 1.0 nu inte ingår i intervallet kan nollhypotesen förkastas på signifikansnivån 5%.