STOCKHOLMS UNIVERSITET
Mathematiska Institutionen
Examinator: Jonathan Rohleder

Tentamensskrivning
Matematiska metoder för ekonomer
7,5 hp
2019-01-17, 09:00-14:00

Lösningarna ska vara klart och tydligt skrivna med kortfattade förklaringar som gör din tankegång lätt att följa. Otydlig lösning kan ge avdrag trots korrekta beräkningar. Institutionens räknare är tillåtna, men exakta svar förväntas om ej annat är angivet. Formelsamling är ej tillåten utöver det som ges på detta blad. Totalt 20 poäng ger garanterat betyg E.

---

1. **(6 p.)** Bestäm Taylorpolynomet av grad 3 till funktionen $f(x) = x^2 e^x$ kring $x_0 = 1$.

   Lösning: Med produktregeln blir derivatorna

$$f'(x) = (x^2 + 2x)e^x,$$
$$f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x,$$
$$f'''(x) = (x^2 + 6x + 6)e^x.$$

   Vi sätter in $x = 1$ och får $f(1) = e$, $f'(1) = 3e$, $f''(1) = 7e$ och $f'''(1) = 13e$. Därför blir Taylorapproximationen

$$f(x) \approx e + 3e(x-1) + \frac{7}{2}e(x-1)^2 + \frac{13}{6}e(x-1)^3.$$

2. **(8 p.)** Beräkna integralerna

$$\int_1^\infty \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{och} \qquad \int \frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

   Lösning: Första integralen beräknar vi genom substitutionen $u = -2\sqrt{x}$, vilken ger $\mathrm{d}u = -\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. Då blir integralen

$$\int_1^\infty \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -\lim_{b\to\infty}\int_{-2}^{-2\sqrt{b}} e^u\,\mathrm{d}u = \lim_{b\to\infty} e^u\Big|_{-2\sqrt{b}}^{-2}$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left(e^{-2} - e^{-2\sqrt{b}}\right) = e^{-2}.$$

   För den andra integralen använder vi partialintegration med $f(x) = 2 + \ln x$ och $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Sedan har vi $f'(x) = \frac{1}{x}$ och $g(x) = \sqrt{x}$ och vi får

$$\int \frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x}(2+\ln x) - \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x}(2+\ln x) - 2\sqrt{x} + C = \sqrt{x}\ln x + C.$$

3. **(7 p.)** Bestäm för varje reellt tal a alla lösningar till det linjära ekvationssystemet

$$2x - y + z = 1,$$
$$x + 2y - z = 1,$$
$$-x + y + az = 1.$$

Lösning: Vi skriver systemet som matris och använder Gausselimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 5/2 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & a+1/2 & 3/2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/5 & 1/5 \\ 0 & 1/2 & a+1/2 & 3/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & a+4/5 & 7/5 \end{array}\right).$$

Vi ser direkt att det finns ingen lösning om $a + 4/5 = 0$, d.v.s. om $a = -4/5$. För $a \neq -4/5$ finns en entydig lösning. Den sista raden ger oss $z = \frac{7}{5a+4}$. Vi sätter in detta i den andra raden och får (efter förenkling) $y = \frac{a+5}{5a+4}$. Efter detta, den första raden ger oss efter förenkling $x = \frac{3a+1}{5a+4}$.

4. **(8 p.)** Låt $f(x) = x^3(x-1)$.

   (a) Undersök var f är växande resp. avtagande.

   (b) Bestäm maximum och minimum till f på intervallet $[-1, 1]$.

   (c) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{e^x}$.

Lösning: (a) Det finns inga luckor i definitionsmängden, och derivatan blir $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x-3)$. Således är de enda punkterna där f kan förändra monotonin precis lösningarna till $0 = x^2(4x-3)$, d.v.s. $x = 0$ och $x = 3/4$. Vi testar monotonin:

- $f'(-1) = -7 < 0 \Rightarrow f$ avtagande på $(-\infty, 0)$.
- $f'(1/2) = -1/4 \Rightarrow f$ avtagande på $(0, 3/4)$.
- $f'(1) = 1 > 0 \Rightarrow f$ växande på $(3/4, \infty)$.

Sammanlagt betyder detta att f är avtagande på $(-\infty, 3/4)$ och växande på $(3/4, \infty)$.

(b) Vi vet från (a) att den ända stationära punkten som kan vara en minimi- eller maximipunkt är $x = 3/4$, vilket är en lokal minimipunkt enligt (a) eftersom f är avtagande till vänster om $3/4$ och växande till höger. Vi jämför med randpunkterna -1 och 1 av intervallet:

$$\begin{aligned} f(3/4) &= -\frac{27}{256} \approx -0,11, \\ f(-1) &= 2, \\ f(1) &= 0. \end{aligned}$$

Därför är $-27/256$ minimum till f och 2 maximum till f.

(c) Gränsvärdet är av typ "$\frac{\infty}{\infty}$". Med L'Hopitals regel (flera gånger) beräknar vi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 - 3x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{12x^2 - 6x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{24x - 6}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{24}{e^x} = 0.$$

5. **(5 p.)** Vi definierar $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + \ln 2$ och

$$S_n = 1 + \ln 2 + (\ln 2)^2 + \cdots + (\ln 2)^{n-1} \qquad \text{för } n = 3, 4, \ldots$$

(a) Vilket värde har S_{2019}?

(b) Finns det något n för vilket $S_n > 4$?

Lösning: Summan är den geometriska summan med $a = 1$ och $k = \ln 2$. Därför har vi

$$S_{2019} = a\frac{1-k^{2019}}{1-k} = -\frac{1-(\ln 2)^{2019}}{1-\ln 2} \approx 3,26.$$

(b) S_n är växande när n växer. Dessutom är (eftersom $\ln 2 \approx 0,69 < 1$)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-\ln 2} \approx 3,26.$$

S_n blir aldrig större än detta värde, vilket innebär att det finns inget n med $S_n > 4$.

6. **(6 p.)** Finn de stationära punkterna till funktionen $f(x, y) = x^3 + y^3 + 6xy + 2$ och bestäm deras karaktär (lokalt maximum, lokalt minimum eller sadelpunkt).

Lösning: De första partiella derivatorna blir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 6y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 + 6x.$$

Delar man i 3 så ser man att varje stationär punkt (x, y) uppfyller det ickelinjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x^2 + 2y &= 0, \\ y^2 + 2x &= 0. \end{aligned}$$

Den första ekvationen ger $y = -\frac{x^2}{2}$. Vi sätter in det i den andra ekvationen och får $\frac{x^4}{4} + 2x = 0$, vilket kan skrivas som $x(\frac{x^3}{4} + 2) = 0$ och har lösningarna $x = 0$ och $x = -2$. Med den första ekvationen får vi dem två stationära punkterna $(0, 0)$ och $(-2, -2)$. Andraderivatorna av f är

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y.$$

För $(0, 0)$ får vi då $A = 0, B = 6, C = 0$, vilket ger $AC - B^2 = -36 < 0$. Därför är $(0, 0)$ en sadelpunkt av f.

För $(-2, -2)$ blir det $A = -12, B = 6, C = -12$, vilket ger $AC - B^2 = 144 - 36 > 0$ och $A < 0$. Därför är $(-2, -2)$ en lokal maximipunkt för f.

Var god vänd!

FORMLER

Approximation av f kring $x = x_0$ given av Taylorpolynomet av grad n:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Om stationära punkter av funktioner av två variabler:

Om $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, sätt $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$.

- (x, y) är en lokal maximipunkt om $A < 0$ och $AC - B^2 > 0$.
- (x, y) är en lokal minimipunkt om $A > 0$ och $AC - B^2 > 0$.
- (x, y) är en sadelpunkt om $AC - B^2 < 0$.