STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Examinator: Jonathan Rohleder

Tentamensskrivning
Matematiska metoder för ekonomer
7,5 hp
2019-05-02, 09:00-14:00

Lösningarna ska vara klart och tydligt skrivna med kortfattade förklaringar som gör din tankegång lätt att följa. Otydlig lösning kan ge avdrag trots korrekta beräkningar. Institutionens räknare är tillåtna, men exakta svar förväntas om ej annat är angivet. Formelsamling är ej tillåten utöver det som ges på detta blad. Totalt 20 poäng ger garanterat betyg E.

---

1. **(7 p.)** Låt $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-4}$.
   (a) Bestäm definitionsmängden för f.
   (b) Finn alla lokala minimi- och maximipunkter till f.
   (c) Undersök var f är konvex resp. konkav.
   (d) Undersök om f har något globalt maximum.

Lösning: (a) Täljare och nämnare av f är polynom. Därför är f definierad överallt utifrån täljarens rötter, det betyder utifrån $x = 4$. Definitionsmängden för f är alltså $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

(b)–(c) Derivatan är

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x-4) - (x+1)^2}{(x-4)^2} = (x+1)\frac{2(x-4) - (x+1)}{(x-4)^2} = \frac{(x+1)(x-9)}{(x-4)^2}.$$

Då ser man direkt att f' har två nollställen, nämligen -1 och 9. Vi beräknar andraderivatan:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x-9+x+1)(x-4)^2 - (x+1)(x-9)2(x-4)}{(x-4)^4} \\ &= \frac{(2x-8)(x-4) - 2(x+1)(x-9)}{(x-4)^3} = \frac{50}{(x-4)^3}. \end{aligned}$$

Man ser igen direkt att $f''(x)$ är negativ för $x < 4$ och positiv för $x > 4$. Därför är f konkav på intervallet $(-\infty, 4)$ och konvex på $(4, \infty)$. Särskilt har f ett lokalt maximum i $x = -1$ och ett lokalt minimum i $x = 9$.

(d) f har inget globalt maximum eftersom t.ex.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{x-4} = +\infty$$

som man ser antingen genom att använda L'Hopitals regel eller eftersom graden av täljaren är 2 vilket är större än graden av nämnaren, vilken är 1.

Alternativ förklaring: Varje globalt maximum är också ett lokalt maximum och eftersom f är deriverbar överallt på definitionsmängden är $x = -1$ den enda punkten där ett globalt maximum kan ligga. Men t.ex. $f(-1) = 0 < 36 = f(5)$.

2. **(8 p.)** Beräkna integralerna

$$\int_1^{2019} \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\infty} 1/(x+3)^2\,\mathrm{d}x \qquad \text{och} \qquad \int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Lösning: Den första integralen kan beräknas direkt och ger

$$\int_1^{2019} \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln x}{2}\Big|_{x=1}^{2019} = \frac{\ln 2019}{2} - \frac{\ln 1}{2} = \frac{\ln 2019}{2} \approx 3,81.$$

Den andra integralen skrivs om som gränsvärde. Vi får

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} 1/(x+3)^2\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} 1/(x+3)^2\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \Big(-\frac{1}{x+3}\Big)\Big|_{x=0}^{b} \\ &= \lim_{b\to\infty} \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{b+3}\Big) = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

För den tredje integralen använder vi oss av substitutionen $t = \sqrt{x}$, vilken ger $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$. Integralen blir då

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{(\sqrt{x}+1)2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{t+1}\,\mathrm{d}t = 2\ln(t+1) + C = 2\ln(\sqrt{x}+1) + C.$$

(Inget absolutbelopp behövs i logaritmen då $t + 1 = \sqrt{x} + 1 > 0$ i alla fall.)

3. **(7 p.)** Använd Gausselimination för att bestämma alla lösningar till det linjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1,\\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1,\\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1,\\ x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 2.\end{aligned}$$

Lösning: Vi skriver systemet i matrisform och genomför Gausselimination:

$$\begin{aligned}&\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 3 & 1\\ 6 & 3 & -2 & 1\\ 1 & -5 & 7 & 2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1 & 1/2\\ 1 & -2 & 3 & 1\\ 6 & 3 & -2 & 1\\ 1 & -5 & 7 & 2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1 & 1/2\\ 0 & -3/2 & 2 & 1/2\\ 0 & 6 & -8 & -2\\ 0 & -9/2 & 6 & 3/2\end{array}\right)\\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1 & 1/2\\ 0 & 1 & -4/3 & -1/3\\ 0 & 6 & -8 & -2\\ 0 & -9/2 & 6 & 3/2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1 & 1/2\\ 0 & 1 & -4/3 & -1/3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).\end{aligned}$$

Det finns iget pivotelement i den tredje kolonnen. Därför får vi välja $t = x_3$ godtyckligt. (Särskilt finns oändligt många lösningar.) Den tredje raden ger $x_2 = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}t$, och den första kan skrivas som $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - t = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t$. Den generella lösningen till systemet är alltså

$$(x_1, x_2, x_3) = \Big(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0\Big) + t\Big(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1\Big),$$

där $t \in \mathbb{R}$ är godtyckligt.

4. **(5 p.)** Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till funktionen $f(x) = e^{\sqrt{x}-2}$ kring $x_0 = 4$.

Lösning: Derivatorna är

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}-2}}{2\sqrt{x}},$$

$$f''(x) = \frac{\frac{e^{\sqrt{x}-2}}{2\sqrt{x}}2x - e^{\sqrt{x}-2}\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{e^{\sqrt{x}-2}(1 - \frac{1}{\sqrt{x}})}{4x}.$$

Detta ger

$$f(4) = 1, \qquad f'(4) = \frac{1}{4}, \qquad f''(4) = \frac{1}{32}.$$

Taylorapproximationen av grad 2 till f kring $x_0 = 4$ ges alltså genom

$$f(x) \approx 1 + \frac{1}{4}(x-4) + \frac{1}{64}(x-4)^2.$$

5. **(8 p.)** Skissa området i planet som begränsas av linjerna $x = 0$, $y = 0$ och $y = 1 - x$ och bestäm minimum och maximum av funktionen

$$f(x, y) = 3x - 4x^3 + 12xy$$

på detta område.

Lösning: Vi hittar stationära punkter genom att hitta gemensamma nollställen av

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3 - 12x^2 + 12y \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 12x.$$

Ekvationen $12x = 0$ ger direkt $x = 0$. Vi stoppar in det i $3 - 12x^2 + 12y = 0$ och får ekvationen $3 + 12y = 0$, som har en enda lösning, nämligen $y = -3/12$. Vår enda kritiska punkt är alltså $(0, -3/12)$, men den ligger inte i triangeln.

Randen består av tre delar. Den första sidan beskrivs genom $y = 0$ och $0 \leq x \leq 1$. Där har funktionen formen $g_1(x) = f(x, 0) = 3x - 4x^3$ och har derivatan $g_1'(x) = 3 - 12x^2$. Nollställena till g_1' är då $x = \pm 1/2$. Detta ger den möjlig max- eller minpunkt $(1/2, 0)$. (Punkten med x-koordinaten $-1/2$ ligger inte inom området.)

På sidan med $x = 0$, $0 \leq y \leq 1$ ges f av $g_2(y) = f(0, y) = 0$, vilket betyder att det inte finns eventuella extrempunkter i kantens inre.

Sidan som inte är parallell till någon axel beskrivs genom $0 \leq x \leq 1$ och $y = 1 - x$. Funktionen f har där formen

$$g_3(x) = f(x, 1 - x) = 3x - 4x^3 + 12x(1 - x) = -4x^3 - 12x^2 + 15x.$$

Denna funktion är inte monoton för $0 \leq x \leq 1$. Därför deriverar vi g_3 för att hitta möjliga minimi- och maximipunkter. Vi har

$$g_3'(x) = -12x^2 - 24x + 15,$$

vilket (med pq-formeln) är noll om $x = -5/2$ eller $x = 1/2$. En punkt med negativ x-koordinat kan aldrig ligga i vårt område, alltså får vi en till möjlig extrempunkt, nämligen $(1/2, 1/2)$.

Dessutom är hörnen $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$ möjliga extrempunkter. Vi beräknar nu funktionsvärdena på alla punkter som vi vick fram:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0, \\ f(1/2,0) &= 1, \\ f(1/2,1/2) &= 4, \\ f(1,0) &= -1, \\ f(0,1) &= 0. \end{aligned}$$

Största av värdena är 4 och minsta värdet är -1. Därför är 4 maximum och -1 minimum av f på triangeln.

6. **(5 p.)** Låt funktionen g vara definierad genom den geometriska serien

$$g(x) = 3 + 6x + 12x^2 + 24x^3 + 48x^4 + 96x^5 + \cdots$$

(a) Bestäm definitionsmängden för g.

(b) Finn alla x för vilka $g(x) = 6$.

(c) Finns det något x för vilket $g(x) = 1$?

Lösning: (a)–(b) Funktionen g ges av en geometrisk serie med $a = 3$ och $k = 2x$. Den är definierad (d.v.s. den konvergerar) för $|k| < 1$, alltså om $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Det betyder $D_g = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ är definitionsmängden. Dessutom har man

$$g(x) = \frac{a}{1-k} = \frac{3}{1-2x} \quad \text{för alla } x \in \Big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big).$$

Därför är $g(x) = 6$ ekvivalent med $\frac{3}{1-2x} = 6$, vilket i sin tur är ekvivalent med $3 = 6 - 12x$ och har lösningen $x = \frac{1}{4}$, vilken ligger i D_g.

(c) Löser man ekvationen $\frac{3}{1-2x} = 1$ så har den den enda lösningen $x = -1$ men den ligger inte i definitionsmängden av g. Därför finns inget x för vilket $g(x) = 1$ stämmer.