STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Examinator: Jonathan Rohleder

Tentamensskrivning
Matematiska metoder för ekonomer
7,5 hp
2019-06-04, 09:00-14:00

Lösningarna ska vara klart och tydligt skrivna med kortfattade förklaringar som gör din tankegång lätt att följa. Otydlig lösning kan ge avdrag trots korrekta beräkningar. Institutionens räknare är tillåtna, men exakta svar förväntas om ej annat är angivet. Formelsamling är ej tillåten utöver det som ges på detta blad. Totalt 20 poäng ger garanterat betyg E.

---

1. **(8 p.)** Beräkna integralerna

$$\int_6^{49} \frac{1}{2x-5}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{och} \qquad \int \frac{x}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Lösning: Den första integralen blir

$$\int_6^{49} \frac{1}{2x-5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x-5|\Big|_6^{49} = \frac{\ln 93 - \ln 7}{2} = \frac{\ln \frac{93}{7}}{2} \approx 1,29.$$

För den andra integralen har vi

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} \frac{1}{e^x}\,\mathrm{d}x = -\lim_{b\to\infty} e^{-x}\Big|_0^b = -\lim_{b\to\infty}\left(e^{-b}-1\right) = 1.$$

Den tredje integralen kan man lösa på olika sätt, till exempel med partialintegration eller på följande sätt:

$$\int \frac{x}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x-1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

för godtyckligt $C \in \mathbb{R}$.

2. **(7 p.)**

(a) Använd Gausselimination för att bestämma alla lösningar till det linjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= -2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1. \end{aligned}$$

(b) Bestäm determinanten till matrisen

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösning: (a) Vi skriver systemet i matrisform och genomför Gausselimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Det finns inget pivotelement i den andra kolonnen. Därför får vi välja $t = x_2$ godtyckligt. (Särskilt finns oändligt många lösningar.) Den andra raden ger $x_3 = 0$, och den första kan skrivas som $x_1 = -1 + 2t - x_3 = -1 + 2t$. Den generella lösningen till systemet är alltså

$$(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 0) + t(2, 1, 0),$$

där $t \in \mathbb{R}$ är godtyckligt.

(b) Ekvationssystemet i (a), vars koefficientmatris är lika med M, har oändligt många lösningar. Därför har vi $\det M = 0$. (Det får man alternativt genom beräkning med, t. ex., Sarrusregeln.)

3. **(4 p.)**

(a) Bestäm något n för vilket den geometriska summan $S_n = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1}$ är lika med 1 048 575 (om ett sådant n existerar).

(b) Beräkna värdet av den geometriska serien

$$S = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \cdots$$

Lösning: (a) Det handlar om den geometriska summan med $a = 1$ och $k = 2$. Detta ger $S_n = \frac{k^n - 1}{k - 1} = 2^n - 1$. Ekvationen som ska lösas är alltså $2^n - 1 = 1048575$, vilket är ekvivalent med $n \ln 2 = \ln(1048576)$ och har lösningen $n = \frac{\ln(1048576)}{\ln 2} = 20$.

(b) Detta är den geometriska serien med $a = 2$ och $k = -\frac{1}{2}$. Värdet på serien blir då

$$S = \frac{a}{1 - k} = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3}.$$

4. **(8 p.)**

(a) Låt $f(x) = x \ln x$. Bestäm definitionsmängden för f, finn alla lokala minimi- och maximipunkter till f och undersök var f är konvex resp. konkav.

(b) Beräkna högergränsvärdet $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$.

(c) Låt $g(x) = \sqrt{e^{\sqrt{x^2+1}}}$. Bestäm derivatan $g'(x)$ av $g(x)$.

Lösning: (a) Funktionen är definierad för alla $x > 0$, d.v.s. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ eftersom detta är definitionsmängden av ln. Derivatorna är

$$f'(x) = \ln(x) + 1 \qquad \text{och} \qquad f''(x) = \frac{1}{x}.$$

Den första derivatan blir noll när $\ln x = -1$, vilket är ekvivalent med $x = \frac{1}{e}$. Andraderivatan är positiv för alla $x > 0$ och därför är funktionen konvex på hela definitionsmängden och f har ett lokalt minimum i $x = \frac{1}{e}$.

(b) Vi skriver f som $f(x) = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ där täljaren går mot $-\infty$ och nämnaren går mot ∞ när $x \to 0$ från höger. Vi använder L'Hopitals regel och får

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0^+} x = 0.$$

(c)

$$g'(x) = \frac{e^{\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{e^{\sqrt{x^2+1}}}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{xe^{\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{e^{\sqrt{x^2+1}}}\sqrt{x^2+1}}.$$

5. **(5 p.)** Bestäm Taylorpolynomet av grad 3 till funktionen $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ kring $x_0 = 1$.

   Lösning: Derivatorna av f är

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}, \qquad f''(x) = \frac{(2-2x)e^x - (2x - x^2)e^x}{e^{2x}} = \frac{2 - 4x + x^2}{e^x}$$

och

$$f'''(x) = \frac{(-4+2x)e^x - (2 - 4x + x^2)e^x}{e^{2x}} = \frac{-6 + 6x - x^2}{e^x}.$$

Vi får då

$$f(1) = \frac{1}{e}, \quad f'(1) = \frac{1}{e}, \quad f''(1) = -\frac{1}{e} \quad \text{och} \quad f'''(1) = -\frac{1}{e}.$$

Detta ger Taylorapproximationen

$$f(x) \approx \frac{1}{e} + \frac{1}{e}(x-1) - \frac{1}{2e}(x-1)^2 - \frac{1}{6e}(x-1)^3.$$

6. **(8 p.)** Skissa området i planet som begränsas av linjerna $x = 0$, $y = 0$ och $y = 3 - x$ och bestäm minimum och maximum av funktionen

$$f(x, y) = xy^2 - 2x^2y + 3x$$

på detta område.

Lösning: Vi kollar först på kritiska punkter inom området (vilket är triangeln med hörnen $(0,0)$, $(0,3)$ och $(3,0)$). De första partiella derivatorna är

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 - 4xy + 3 \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy - 2x^2 = 2x(y-x).$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ blir noll när antingen $x = 0$ eller $x = y$. För $x = 0$ ger ekvationen $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ att $y^2 + 3 = 0$ vilket inte har lösningar. För $x = y$ får vi $x^2 - 4x^2 + 3 = 0$, med andra ord, $x^2 = 1$. Detta har lösningarna $x = \pm 1$ med ingen punkt med $x < 0$ ligger i triangeln. Den enda kritiska punkten inom triangeln blir då $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$.

Vi koller triangelns tre kanter. För $x = 0$ och $0 \leq y \leq 3$ har man

$$g_1(y) := f(0, y) = 0,$$

d.v.s. funktionen är konstant noll på hela kanten.

För $y = 0$ och $0 \leq x \leq 3$ har vi

$$g_2(x) := f(x, 0) = 3x,$$

vilket är växande för $0 \leq x \leq 3$. Minimum och maximum kan då inte antas i kantens inre.

Den tredje (sneda) sidan beskrivs genom $y = 3 - x$ och vi har

$$g_3(x) = f(x, 3 - x) = x(3 - x)^2 - 2x^2(3 - x) + 3x = 3x(x^2 - 4x + 4) = 3x(x - 2)^2$$

Derivatan är

$$g_3'(x) = 3(x - 2)^2 + 6x(x - 2) = 9x^2 - 24x + 12.$$

Enligt pq-formeln blir detta noll för $x = \frac{2}{3}$ och $x = 2$, vilket ger punkterna $(\mathbf{\frac{2}{3}}, \mathbf{\frac{7}{3}})$ och $(\mathbf{2}, \mathbf{1})$ vilka kan vara möjliga min- och maxpunkter.

Nu sammlar vi ihop allt och beräknar funktionsvärdena på alla eventuella extrempunkter.

$$f(0,0) = 0, \quad f(1,1) = 2, \quad f(0,3) = 0, \quad f(3,0) = 9, \quad f\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right) = \frac{32}{9}, \quad f(2,1) = 0.$$

Minimumvärdet av f på triangeln är alltså 0 och maximumvärdet är 9.

FORMLER

Approximation av f kring $x = x_0$ given av Taylorpolynomet av grad n:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Lösningsförslag läggs upp på kurssidan efter skrivningen.

Tentamensåterlämning: 12 juni 2019, kl. 15:00 - 15:15, i sal 22 (Kräftriket 5).

Efter återlämningstiden finns skrivningarna att hämta på studentexpeditionen, rum 204 i hus 6.

Lycka till!