STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Examinator: Salvador Rodriguez-Lopez
MM3001-7,5 hp

Tentamensskrivning
Matematiska metoder för ekonomer
2019-11-27, 09:00-14:00

Lösningarna ska vara klart och tydligt skrivna med kortfattade förklaringar som gör din tankegång lätt att följa. Otydlig lösning kan ge avdrag trots korrekta beräkningar. Institutionens räknare är tillåtna, men exakta svar förväntas om ej annat är angivet. Formelsamling är ej tillåten utöver det som ges på detta blad. Totalt 20 poäng ger garanterat betyg E. Observera att talen inte är ordnade efter svårighetsgraden.

---

1. **(6 p.)** Låt $f(x) := -2x^3 - 3x^2 + 12x + 43$.
   (a) Finn alla lokala extremum till funktionen f.
   (b) Ange på vilka intervall funktionen är växande resp. avtagande.
   (c) Har funktionen något globalt maximum och/eller minimum?

2. **(7 p.)** Beräkna integralerna

$$\int \left(9\sqrt{y}\ln y + 12y^2 e^{2019+4y^3}\right) \mathrm{d}y, \qquad \text{och} \qquad \int_1^e \frac{\ln x}{x\left(1+\ln^2 x\right)} \mathrm{d}x.$$

3. **(7 p.)** Skriv följande system i matrisform (d.v.s. skriv systemet som $A \cdot v = b$, när A är en 3×3-matris, v är en 3×1-matris och b är en 3×1-matris)

$$\begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0, \\ x - 2y - z - 4 = 0, \\ 2x - y + z - 5 = 0. \end{cases}$$

   Använd Gausselimination för att lösa ekvationssystemet.

4. **(7 p.)** Låt

$$g(x) = 2x^2 + 4x + \ln\left((2x+3)^4\right) - 1.$$

   (a) Bestäm definitionsmängden för g.
   (b) Bestäm Taylorpolynomet av ordning 2 till funktionen g kring $x = -1$.
   (c) I vilken punkt skär tangentlinjen till grafen av g i $(-1, g(-1))$ x-axeln?

5. **(6 p.)** Bestäm minimum och maximum för funktionen

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y.$$

   i det område i planet som har hörn i punkterna $(-2,-1)$, $(-2,1)$, $(2,1)$ och $(2,-1)$.

6. **(7 p.)** Bestäm alla reella tal a sådana att den oändliga serien $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n e^{an}$, konvergerar. För vilket värde på a är seriens summa lika med 4?

Var god vänd!

FORMLER

Approximation av f kring $x = x_0$ given av Taylorpolynomet av ordning n:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Lösningsförslag läggs upp på kurssidan efter skrivningen.

Tentamensåterlämning: Tisdag 10 December 2019, kl. 11:00 - 11:15, i rum 402 (Kräftriket 6).

Efter återlämningstiden finns skrivningarna att hämta på studentexpeditionen, rum 204 i hus 6.

Lycka till!

Lösningsförslag till tentamen: Matematiska metoder för ekonomer

1. (a) Vi har att för alla $x \neq 1$

$$f'(x) = -6x^2 - 6x + 12 = -(x+2)(x-1).$$

Då stationära punkter är $x = -2$ och $x = 1$. Vi observera att $f''(x) = -12x - 2$ och att

$$22 = f''(-2) > 0 > f''(1) = -14,$$

då funktionen har en lokal minimum i $x = -2$ och en lokal maximum i $x = 1$.

(b) Funktionen är växande i $(-2, 2)$ och och avtagande i $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

(c) Vi observerar att

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \qquad \text{och} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$

då får vi att funktionen saknas globalt maximum och minimum.

2. (a) Observera att

$$I := \int \left(9\sqrt{y}\ln y + 12y^2 e^{2019+4y^3}\right) \mathrm{d}y = 9\int \sqrt{y}\ln y\mathrm{d}y + \int \left(12y^2 e^{2019+4y^3}\right) \mathrm{d}y.$$

Den sista integral är lika med

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(e^{2019+4y^3}\right) \mathrm{d}y = e^{2019+4y^3} + C.$$

För de andra integral får vi att

$$\begin{aligned}\int \sqrt{y}\ln y\mathrm{d}y = \int y^{1/2}\ln y\mathrm{d}y &= \frac{2}{3}\left(y^{3/2}\ln y - \int y^{\frac{3}{2}-1}\mathrm{d}y\right)\\ &= \frac{2}{3}y^{3/2}\ln y - \frac{4}{9}y^{3/2} + C.\end{aligned}$$

Då får vi att

$$I = -4y^{3/2} + 6y^{3/2}\ln(y) + e^{4y^3+2019} + C.$$

(b) En variablebyte $y = 1 + \ln^2 x$ ger

$$\int \frac{\ln x}{x\left(1+\ln^2 x\right)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\ln\left((\ln(1+x))\right) + C.$$

Analysensfundamentasatsen ger att integralen är lika med

$$\frac{\ln 2}{2}.$$

3. Systemet skrivs om som

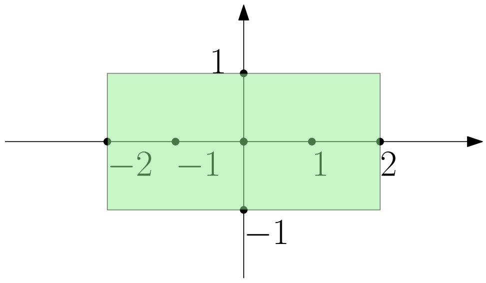
$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ 4\\ 5\end{pmatrix}.$$

Gausseliminering ger oss att

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & -1 & 4\\ 2 & -1 & 1 & 5\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Då har systemet entydig lösning

$$\begin{cases} x &= 2,\\ y &= -1\\ z &= 0,\end{cases}$$



4. (a) Definitionsmängden av funktionen f är $D_f := \mathbb{R} \setminus \{\frac{-3}{2}\}$.
   (b) Deriveringsreglerna ger oss att for alla $x \in D_f$

$$f'(x) = 4 + 4x + \frac{8}{2x+3}, \qquad \text{och} \qquad f''(x) = 4 - \frac{16}{(2x+3)^2}.$$

   Så har vi att

$$f(-1) = -3, \qquad f'(-1) = 8, \qquad f''(-1) = -12.$$

   Sammanfattningsvis är att Taylorpolynomet av ordning 2 kring $x = -1$ är

$$-3 + 8(x+1) - 6(x+1)^2 = -6x^2 - 4x - 1.$$

   (c) Den ekvation av tangentlinjen till grafen av f i punkten $(-1, -3)$ är $y = -3 + 8(x+1) = 8x + 5$ som skär x-axeln i $x = \frac{-5}{8}$.

5. Området D ser ut som visas i figuren. Randen av området kan beskrivas som fyra segmenten:

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{(x,y) : \, x \in [-2,2], y = -1\}, \\ S_2 &:= \{(x,y) : \, y \in [-1,1], x = 2\}, \\ S_3 &:= \{(x,y) : \, x \in [-2,2], y = 1\}, \\ S_4 &= \{(x,y) : \, y \in [-1,1], x = -2\}. \end{aligned}$$

Derivering ger oss att

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= 2x - 2, \\ \partial_y f(x,y) &= 2y - 2. \end{aligned}$$

Då finns det en entydig stationära punkt, som är $(1,1)$, men det ligger inte inom området.

Hörnen av området är $P_0 = (-2,-1)$, $P_1 = (2,-1)$, $P_3 = (2,1)$ och $P_4 = (-2,1)$. Då får vi att

$$f(-2,-1) = 11, \quad f(2,-1) = 3, \qquad f(2,1) = -1, \qquad f(-2,1) = 7.$$

För alla punkter (x,y) i randen S_1 får vi att

$$h_1(x) := f(x,y) = x^2 - 2x + 3, \qquad x \in [-2,2].$$

Undersökning av stationära punkter i intervallet $(-2,2)$ ger

$$0 = h_1'(x) = 2x - 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Då funktionsvärdet i punkten $(1,-1)$ är

$$f(1,-1) = 2.$$

För alla punkter $(x,y) \in S_2$ får vi att

$$h_2(y) := f(x,y) = y^2 - 2y, \qquad y \in [-1,1].$$

Då derivatan blir

$$h_2'(y) = 0 \iff y = 1 \notin (-1,1).$$

För alla punkter $(x,y) \in S_3$ får vi att

$$h_3(x) := f(x,y) = x^2 - 2x - 1, \qquad x \in [-2,2],$$

då

$$0 = h_3'(x) = 2x - 2 \iff x = 1,$$

och

$$f(1,1) = -2.$$

För alla punkter $(x,y) \in S_3$ får vi att

$$h_4(y) := f(x,y) = y^2 - 2y + 8, \qquad y \in [-1,1].$$

Derivering ger oss

$$0 = h_4'(y) \iff y = 1 \notin (-1,1).$$

Sammanfattningsvis är att den maximum av funktionen på området antas i punkten $P = (-2,-1)$, och $f(P) = 11$. Dessutom, den minimum av funktionen på området är -2 och det antas i punkten $(1,1)$.

6. Den geometriska serien konvergerar om $\frac{4e^a}{5} < 1$. Det är ekvivalent med $a < \ln(5/4)$. Därför för alla reella tal $a \in (-\infty, \ln(5/4))$, seriens summa $S(a)$ är

$$S(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}e^a\right)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}e^a\right)^n\right) - 1 = \frac{\frac{4e^a}{5}}{1 - \frac{4e^a}{5}} = \frac{4e^a}{5 - 4e^a}.$$

Då

$$S(a) = 4 \Leftrightarrow e^a = 5 - 4e^a \Leftrightarrow e^a = 1 \Leftrightarrow a = 0.$$