MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Sofia Tirabassi

Tentamensskrivning i
MM3001
2024-10-28

Instructions:

- This exam is given in two versions, English and Swedish. In case of ambiguity it is the ENGLISH text that holds.
- During the exam you MAY NOT use textbooks, class notes, or any other supporting material apart from the formula sheet given to you.
- Use of calculators is permitted for performing calculations. The use of graphic or programmable features is NOT permitted.
- You can use the formula sheet that come with the exam.
- Start every problem on a new page, and write at the top of the page which problem it belongs to. (But in multiple part problems it is not necessary to start every part on a new page)
- In all of your solutions, give explanations to clearly show your reasoning. Points may be deducted for unclear and wrong argument, even if the final answer is correct.
- Write clearly and legibly.
- Where applicable, indicate your final answer clearly by putting A BOX around it.

Note: There are six problems, some with multiple parts. The problems are not ordered according to difficulty

---

(1) (5pt) Compute Taylor polynomial of degree 3 of the function
$$f(x) = \sqrt{1+x^2},$$
around the point $x_0 = 0$, and use it to give an approximation of $f(0.1)$.

(2) Consider the equation
$$y^3 + xy = C$$
defining a curve Γ in the (x, y)-plane.
  (a) (1 pt) Determine the value of C such that the curve goes through the point $(0, 3)$.
  (b) (3pt) Let now $C = 27$. Locally around the point $(0, 3)$ the curve defines $y = y(x)$ as a function of x. Determine the value of $y'(0)$.
  (c) (1pt) Provide the equation of the tangent line to the curve Γ at the point $(0, 3)$.

(3) Consider the function $f(x) = 5000\left(x + \frac{100}{x}\right)$.
  (a) (1pt) Find the natural domain of $f(x)$.
  (b) (2pt) Find where the function is increasing or decreasing. Find the critical points of $f(x)$ and determine their type.
  (c) (1pt) Find where the function is concave or convex.
  (d) (1pt) Find the max and min values that the function takes on the interval $[-11, -9]$.

(4) Compute the following integrals:
  (a) (2.5 pt) $\displaystyle\int \left(\frac{8x^2}{(x^3+2)^{100}} + \sqrt[8]{e^x}\right) dx,$

(b) (2.5pt) $\int_0^1 x \ln(x) dx$.

(5) Consider the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

(a) (1 pt) Compute the determinant of A, $|A|$ as a function of c.
(b) (1 pt) Find all the values of c for which A is not invertible.
(c) (3 pt) Determine whether the following linear system has 1, 0, or infinitely many solutions. In case of 1 solution, compute it, in case of infinitely many solutions, provide 2 different solutions.

$$\begin{cases} x & y & z & = & 1 \\ & +y & +z & = & 2 \\ x & 2y & 2z & = & 3 \\ x & 3y & 3z & = & 5 \end{cases}$$

(6) Consider the two variables function

$$f(x,y) = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$$

defined on the circular diske

$$D = \{(x,y) \mid -2x + x^2 + y^2 \leq 8\}.$$

(a) (2pt) Find all the critical points of $f(x,y)$ - even those lying outside D and determine their type.
(b) (2pt) Determine the maximum and minimum points of f on the *boundary* of D. (In order to get credit you have to explain what you are doing, the correct answer without the right explanation will not be accepted)
(**HINT:** the boundary of D is the circle of center (1,0) and radius 3, observe that on the boundary you have that $x^2 + y^2 = 2x + 8$ and x belongs to the interval $[-2, 4]$).
(c) (1 pt) Determine the minimum and the maximum value of $f(x,y)$ on D. (If you have not solved (b), you may assume that you got minimum value $\ln(4)$ and maximum value $\ln(16)$- which may or not be the correct values)

GOOD LUCK!!!

Senska texten, (formular finns ovanför)

(1) (5pt) Beräkna Taylorpolynomet av grad 3 till funktionen

$$f(x) = \sqrt{1+x^2},$$

omkring punkten $x_0 = 0$, och använd det för approximera $f(0.1)$.

(2) Betrakta ekvationen

$$y^3 + xy = C$$

som definerar en kurva Γ i (x, y)-planet.

(a) (1 pt) Bestäm värdet av C sådan att kurvan går genom punkten $(0, 3)$.
(b) (3pt) Låt $C = 27$. Kring punkten $(0, 3)$ definear kurvan Γ en funktion $y = y(x)$ av x. Hitta $y'(0)$.
(c) (1pt) Ange ekvationen till tangentlinjen av Γ i punkten $(0, 3)$.

(3) Betrakta funktionen $f(x) = 5000\left(x + \frac{100}{x}\right)$.

(a) (1pt) Hitta var funktionen är definerad och hitta lösningarna till $f(x) = 0$.
(b) (2pt) Hitta alla kritiska punkter av f och bestäm deras typ. Bestäm var funktionen är växande och avtagande.
(c) Hitta var funktionen är konkav och konvex.
(d) (1pt) Bestäm maximum och minimum till $f(x)$ på intervallet $[-11, -9]$.

(4) Beräkna följande integraler

(a) (2.5 pt) $\displaystyle\int \left(\frac{8x^2}{(x^3+2)^{100}} + \sqrt[8]{e^x}\right) dx,$
(b) (2.5pt) $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)dx.$

(5) Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

(a) (2 pt) Hitta determinanten av A, det vill säga $|A|$, som en funktion av c.
(b) (1 pt) Hitta alla värden c sådana att A inte är inverterbar.
(c) (2 pt) Hitta hur många lösningar följande ekvationssystem har.

$$\begin{cases} x & y & z & = & 1 \\ & +y & +z & = & 2 \\ x & 2y & 2z & = & 3 \\ x & 3y & 3z & = & 5 \end{cases}$$

Om det finns bara en lösning, ange den. Om det finns oändligt många lösnignar, ange två olika lösningar.

(6) Betrakta följande funktion av två variabler

$$f(x, y) = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$$

som defineras på cirkelskivann

$$D = \{(x, y) \mid -2x + x^2 + y^2 \leq 8\}.$$

(a) (2pt) Hitta alla kritiska punkter av $f(x, y)$ - punkter som ligger utanför D behöver också hittas och bestäm deras typ.

(b) (2pt) Hitta maximum och minumum av $f(x, y)$ på *randen* D . (**Tips**: Randen av D är cirklen med centerum $(1, 0)$ och radius 3. Observera att $x^2 + y^2 = 2x + 8$ med $x \in [-2, 4]$ i D.)

(c) (1 pt) Beräkna minimum och maximum avden storsta och den minst värden till $f(x, y)$ i områdetpå D. (Om man inte har löst (b), kan man antar att minumum och maximumde minsta och storsta värden på randen av Dgränse är ln(4) och ln(16) - som kan varaunde eller inte vara den riktiga svaren)

LYCKA TILL!!!