
Instructions:

- This exam is given in two versions, English and Swedish. In case of ambiguity it is the ENGLISH text that holds.
- During the exam you MAY NOT use textbooks, class notes, or any other supporting material apart from the formula sheet given to you.
- Use of calculators is permitted for performing calculations. The use of graphic or programmable features is NOT permitted.
- You can use the formula sheet that come with the exam.
- Start every problem on a new page, and write at the top of the page which problem it belongs to. (But in multiple part problems it is not necessary to start every part on a new page)
- In all of your solutions, give explanations to clearly show your reasoning. Points may be deducted for unclear and wrong argument, even if the final answer is correct.
- Write clearly and legibly.
- Where applicable, indicate your final answer clearly by putting A BOX around it.

Note: There are six problems, some with multiple parts. The problems are not ordered according to difficulty

- (1) (5pt) Compute Taylor polynomial of degree 3 of the function

$$f(x) = \ln(1 + x),$$

around the point $x_0 = 0$, and use it to give an approximation of $f(0.1)$.

- (2) **Geometric sums and series**

- (a) (1 pt) Compute

$$\sum_{k=10}^{20} 3(0.5)^k$$

- (b) (2 pts) A debt D with yearly interest rate $p\%$ compounded monthly is payable in 120 monthly installments of value a . Using geometric sums, give a formula relating D , p and a .
- (c) (2 pt) A debt of \$120000 with yearly interest of 3.6% compounded monthly is payable in the following way: there is a down payment of \$ 20000 due now, and the rest is payable in 120 monthly installments, with the first installment due in a year. Compute the monthly fee.

- (3) Consider the function $f(x) = \frac{1}{5000}e^{-x^4+200x^2}$.

- (a) (2pt) Find where the function is increasing or decreasing. Find the critical points of $f(x)$ and determine their type.
- (b) (1pt) Find the max and min values that the function takes on the interval $[-1, 11]$.
- (c) (2pt) Compute the $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ and sketch the graph of $f(x)$. Determine if $f(x)$ has a max and min value on $[9, +\infty)$

- (4) Compute the following integrals:

(a) (2.5 pt) $\int (\ln(x) + e^{x^3} x^2) dx,$

(b) (2.5pt) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx.$

(5) **Linear Algebra**

(a) (1 pt) Consider the matrices $A = (1, 2)$ and

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

By A^T and B^T we denote the transpose of A and B . Determine which of the following products are possible to compute: $A \cdot A$, $A \cdot A^T$, $A \cdot B^T$, and $A \cdot B$.

(b) (2 pt) With A and B as above, compute $B \cdot A$ and $\det(A^T \cdot A)$.

(c) (2 pt) Determine whether the following linear system has 1, 0, or infinitely many solutions. In case of 1 solution, compute it, in case of infinitely many solutions, provide 2 different solutions.

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 1 \\ & +y & +z & = & 2 \\ x & +2y & +2z & = & 3 \\ x & +4y & -z & = & 5 \end{cases}$$

(6) Consider the two variables function

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - y^2 - 1$$

defined on the semi disk

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 9, y \geq 0\}.$$

(a) (2pt) Find all the critical points of $f(x, y)$ - even those lying outside D and determine their type.

(b) (2pt) Determine the maximum and minimum points of f on the *boundary* of D .

(HINT: On the side $y = 0$ f is given by $|x| - 1$ with $x \in [-3, 3]$).

(c) (1 pt) Determine the minimum and the maximum value of $f(x, y)$ on D . (If you have not solved (b), you may assume that you got minimum value -7 and maximum value 2 - which may or not be the correct values)

GOOD LUCK!!!

Senska texten, (formular finns ovanför)

- (1) (5pt) Beräkna Taylorpolynomet av grad 3 till funktionen

$$f(x) = \ln(1+x),$$

omkring punkten $x_0 = 0$, och använd det för approximera $f(0.1)$.**(2) Geometric sums and series**

- (a) (1 pt) Beräkna

$$\sum_{k=10}^{20} 3(0.5)^k$$

- (b) (2 pts) En skuld D med årlig ränta $p\%$ som sammansätts (compounds) månatligt ska betalas genom 120 månatliga betalningar på ett värde av a per gång. Genom att använda geometriska summor, hitta en formel som relaterar D , p och a .
- (c) (2 pt) En skuld på \$120000 med årlig ränta 3.6% som sammansätts (compounds) månatligt ska betalas på följande sätt: Det är en direktbetalning på \$20000 som ska betalas idag, och resten ska betalas genom 120 månatliga betalningar på ett värde av a per gång, med den första betalningen om ett år. Beräkna den månatliga kostnaden a .

- (3) Betrakta funktionen
- $f(x) = \frac{1}{5000}e^{-x^4+200x^2}$
- .

- (a) (2pt) Hitta alla kritiska punkter av f och bestäm deras typ. Bestäm var funktionen är växande och avtagande.
- (b) (1pt) Bestäm maximum och minimum till $f(x)$ på intervallet $[-1, 11]$.
- (c) (2pt) Beräkna $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ och skissa grafen till $f(x)$. Bestem om $f(x)$ har största och minsta värden i $[9, +\infty)$

- (4) Beräkna följande integraler

(a) (2.5 pt) $\int (\ln(x) + e^{x^3} x^2) dx,$

(b) (2.5pt) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx.$

(5) Linjär algebra

- (a) (1 pt) Betrakta matrisen
- $A = (1, 2)$
- och

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Med A^T och B^T menar vi transpose till A och B . Bestem vilka av följande produkter kan man räkna: $A \cdot A$, $A \cdot A^T$, $A \cdot B^T$, and $A \cdot B$.

- (b) (2 pt) Med A och B som ovanför, beräkna $B \cdot A$ och $\det(A^T \cdot A)$.
- (c) (2 pt) Hitta hur många lösningar följande ekvationssystem har.

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 1 \\ & +y & +z & = & 2 \\ x & +2y & +2z & = & 3 \\ x & +4y & -z & = & 5 \end{cases}$$

Om det finns bara en lösning, ange den. Om det finns oändligt många lösningar, ange två olika lösningar.

(6) Betrakta följande funktion av två variabler

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - y^2 - 1$$

som definieras på halv cirkelskivan

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 9, y \geq 0\}.$$

- (a) (2pt) Hitta alla kritiska punkter av $f(x, y)$ - punkter som ligger utanför D behöver också hittas och bestäm deras typ.
- (b) (2pt) Hitta maximum och minimum av $f(x, y)$ på *randen* D . (**Tips:** Vid sidan $y = 0$ har vi att $f(x) = |x| - 1$, med $x \in [-3, 3]$.)
- (c) (1 pt) Beräkna minimum och maximum av $f(x, y)$ i området D . (Om man inte har löst (b), kan man anta att minimum och maximum på randen av D är -7 och 2 - som kan vara eller inte vara de riktiga svaren)

LYCKA TILL!!!