
Instructions:

- This exam is given in two versions, English and Swedish. In case of ambiguity it is the ENGLISH text that holds.
- During the exam you MAY NOT use textbooks, class notes, or any other supporting material apart from the formula sheet given to you.
- Use of calculators is permitted for performing calculations. The use of graphic or programmable features is NOT permitted.
- You can use the formula sheet that come with the exam.
- Start every problem on a new page, and write at the top of the page which problem it belongs to. (But in multiple part problems it is not necessary to start every part on a new page)
- In all of your solutions, give explanations to clearly show your reasoning. Points may be deducted for unclear and wrong argument, even if the final answer is correct.
- Write clearly and legibly.
- Where applicable, indicate your final answer clearly by putting A BOX around it.

Note: There are six problems, some with multiple parts. The problems are not ordered according to difficulty

- (1) (5pt) Compute Taylor polynomial of degree 3 of the function

$$f(x) = e^{1-x^2}$$

around the point $x_0 = -1$, and use it to give an approximation of $f(-0.9)$.

- (2) (a) (2 pt) Compute

$$\sum_{k=4}^{24} 3(1.1)^k$$

- (b) (3pt) You determine that you can afford 2500kr per month for a car. Determine the maximum amount you can afford to pay for a car if the interest rate on the loan is 9% yearly, compounded monthly, and you want to repay the loan in 5 years (the first payment is due at the moment of purchasing the car).

- (3) Consider the function

$$f(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{200}} - 1}{x}$$

- (a) (1pt) Find the natural domain of $f(x)$.
- (b) (3pt) Find where the function is increasing and where it is decreasing. Find the critical points of $f(x)$ and determine their type.
- (c) (1pt) Find the maximum and minimum values that the function takes on the interval $[-11, -\frac{1}{3}]$.

- (4) Compute the following integrals:

(a) (2.5 pt) $\int \left(\ln(x) + \sqrt[11]{(3x)^2} \right) dx,$

(b) (2.5pt) $\int_0^1 x e^{x^2} dx.$

(5) **Linear Algebra**

- (a) (1 pt) Consider the matrices $A = (2, 3)$ and

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

By A^T and B^T we denote the transpose of A and B . Determine which of the following products are possible to compute: $A \cdot A$, $A \cdot A^T$, $B \cdot A$. When a product is possible, describe the shape of the resulting matrix.

- (b) (2 pt) With A and B as above, compute $A \cdot B$ and $\det(B \cdot B^T)$
 (c) (2 pt) Let k be a parameter. Show that the following system of equations has exactly one solution for every value of $k \neq 0$.

$$\begin{cases} kx & +2ky & +3kz & = & 4k \\ x & +y & +z & = & 0 \\ 2x & +y & +z & = & 1 \end{cases}$$

Determine two distinct solutions to the system when $k = 0$, using Gauss–Jordan elimination (You will not get partial points for providing a solution without using Gauss-Jordan elimination).

- (6) Consider the two variables function

$$f(x, y) = x^3 + yx^2 + y^2$$

defined in the area

$$D = \{(x, y) \mid x \geq -1, y \geq -1, y \leq x\}.$$

- (a) (2pt) Find all the critical points of $f(x, y)$ – even those lying outside D – and determine their type.
 (b) (2pt) Determine the maximum and minimum points of f on the *boundary* of D . (In order to get credit you have to explain what you are doing, the correct answer without the right explanation will not be accepted)
 (c) (1 pt) Determine the minimum and the maximum value of $f(x, y)$ on D . (If you have not solved (b), you may assume that you got minimum value -1 and maximum value 2 – which may or not be the correct values)

GOOD LUCK!!!

Svensk version

- (1) (5pt) Beräkna Taylorpolynomet av grad 3 till funktionen

$$f(x) = e^{1-x^2}$$

omkring punkten $x_0 = -1$, och använd det för approximera $f(-0.9)$.

- (2) (a) (2 pt) Beräkna

$$\sum_{k=4}^{24} 3(1.1)^k$$

- (b) (3pt) Du har råd att köpa en bil med en betalning av 2500 kr per månad. Beräkna det högsta pris du köpa en bil för om räntan är 9% per år och du vill återbetala skulden inom 5 år (den första betalningen sker vid köptillfället).

- (3) Betrakta funktionen

$$f(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{200}} - 1}{x}$$

- (a) (1pt) Hitta funktionens naturliga definitionsmängd och hitta lösningarna till $f(x) = 0$.
- (b) (2pt) Hitta alla kritiska punkter av f och bestäm deras typ. Bestäm var funktionen är växande och var den är avtagande.
- (c) Hitta var funktionen är konkav och var den är konvex.
- (d) (1pt) Bestäm maximum och minimum till $f(x)$ på intervallet $[-11, -\frac{1}{3}]$.

- (4) Beräkna följande integraler

(a) (2.5 pt) $\int \left(\ln(x) + \sqrt[11]{(3x)^2} \right) dx,$

(b) (2.5pt) $\int_0^1 x e^{x^2} dx.$

- (5)
- Linjär algebra**

- (a) (1 pt) Betrakta matrisen
- $A = (2, 3)$
- och

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Med A^T och B^T menar vi transpotaten till A respektive B . Bestäm vilka av följande produkter man kan beräkna: $A \cdot A$, $A \cdot B^T$, $B \cdot A$. Om produkten är möjlig att beräkna, bestäm formen på den resulterande matrisen.

- (b) (2 pt) Med A och B som ovanför, beräkna $A \cdot B$ och $\det B \cdot B^T$.
- (c) (2 pt) Låt k vara en parameter. Visa att följande linjära system endast har en lösning för varje värde av $k \neq 0$.

$$\begin{cases} kx & +2ky & +3kz & = & 4k \\ x & +y & +z & = & 0 \\ 2x & +y & +z & = & 1 \end{cases}$$

Ange två olika lösningar till systemet när $k = 0$, med användning av Gauss-Jordan elimination. (Du kommer inte få poäng om du använder dig av annan metod.)

- (6) Betrakta följande funktion av två variabler

$$f(x, y) = x^3 + yx^2 + y^2$$

som defineras på området

$$D = \{(x, y) \mid x \geq -1, y \geq -1, y \leq -x\}.$$

- (a) (2pt) Hitta alla kritiska punkter av $f(x, y)$ – punkter som ligger utanför D behöver också hittas – och bestäm deras typ.
- (b) (2pt) Hitta maximum och minimum av $f(x, y)$ på *randen* av D .
- (c) (1 pt) Beräkna minimum och maximum av $f(x, y)$ på D . (Om man inte har löst (b), kan man anta att minimum- och maximumvärdena på randen av D är -1 och 2 – som kan vara eller inte vara de korrekta värdena).

LYCKA TILL!!!